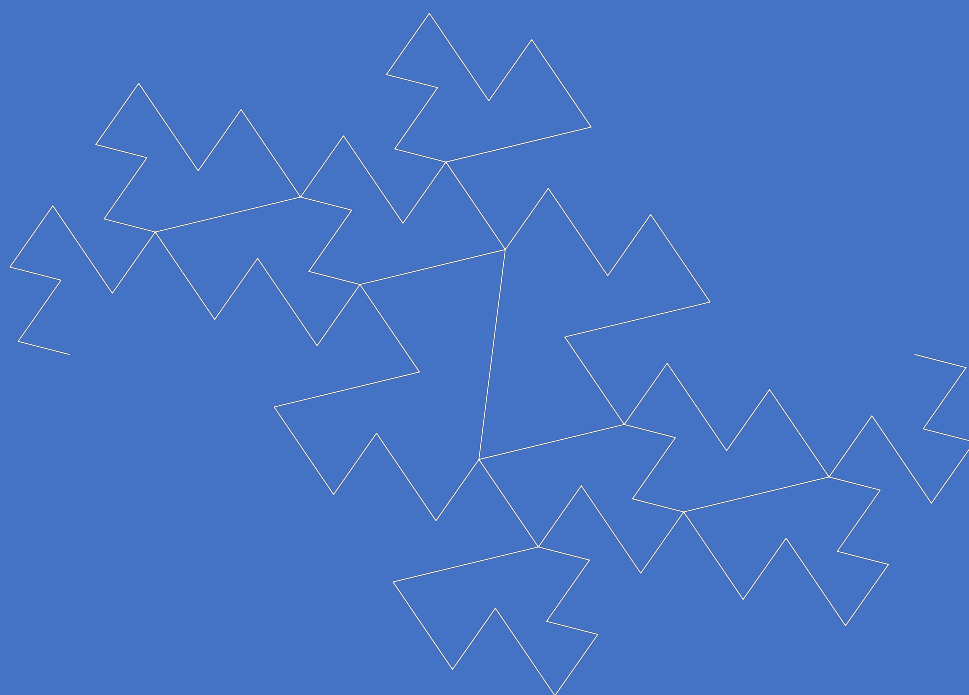


VLAKVULLENDE FRACTALS MET ANDERE ROOSTERS



Nico Bakker

Inhoudsopgave

Inhoudsopgave	1
Inleiding	2
Bekende vlakvullende fractals	3
Terdragon	3
5-Dragon	5
Eend-kromme	7
Dimensie berekening	7
Vlakvullende fractals	8
Eend-figuur	16
Vogelnestjes	17
Varianten van de Eend-kromme	22
Spiralen	22
Andere voorbeelden	25
Titanic	28
Titanic2	28
Titanic3	31
Titanic4	34
Ingesloten oppervlakte	36
Peaks	41
Twin Peaks	41
Triplet Peaks	44
Quads Peaks	47
Peaks figuren	49
Ingesloten oppervlakte	52
Conclusie	55
Reflectie	57
Nawoord	58
Literatuurlijst	59

Inleiding

Over vlakvullende fractals is veel gepubliceerd. Bekende vlakvullende fractals zijn de Terdragon en de 5-Dragon. Deze twee, maar ook vele andere vlakvullende fractals, zijn gebaseerd op een driehoekig of vierkant rooster.

Ik heb me daarbij de volgende vragen gesteld:

- Zijn er ook vlakvullende fractals te vinden, die niet aan een driehoekig of vierkant rooster gebonden zijn?
- Zo ja, wat zijn dan de eigenschappen van zulke fractals?

Het resultaat van deze zoektocht vindt u in deze studie.

Voordat ik hiermee begin, laat ik de bovengenoemde Terdragon en de 5-Dragon zien en hun dimensie.

Vervolgens laat ik de door mij gevonden fractals zien, en hoe ik daartoe gekomen ben. Ik heb de vrijheid genomen deze nieuwe fractals een naam te geven.

Nico Bakker

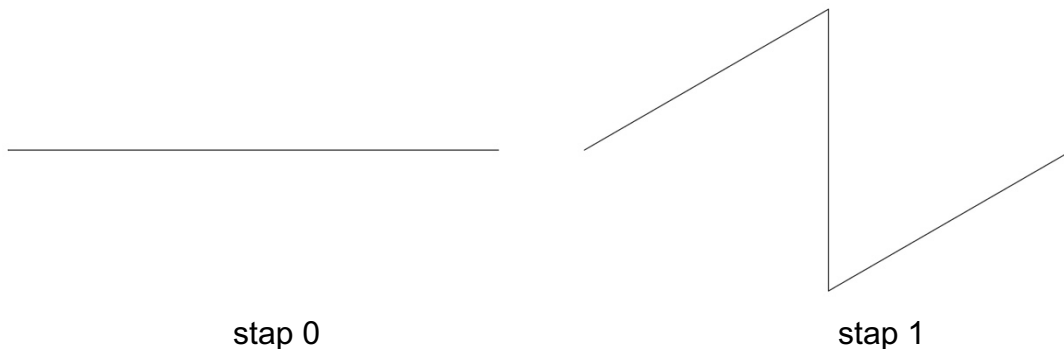
Hoorn, augustus 2025

Bekende vlakvullende fractals

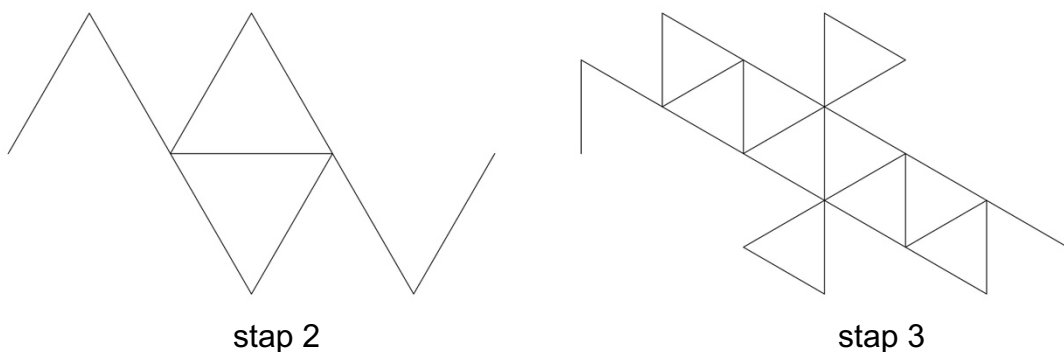
Van de bekende vlakvullende fractals heb ik de Terdragon en de 5-Dragon gekozen om als introductie van fractals te dienen en om berekeningen aan de dimensie te illustreren.

Terdragon

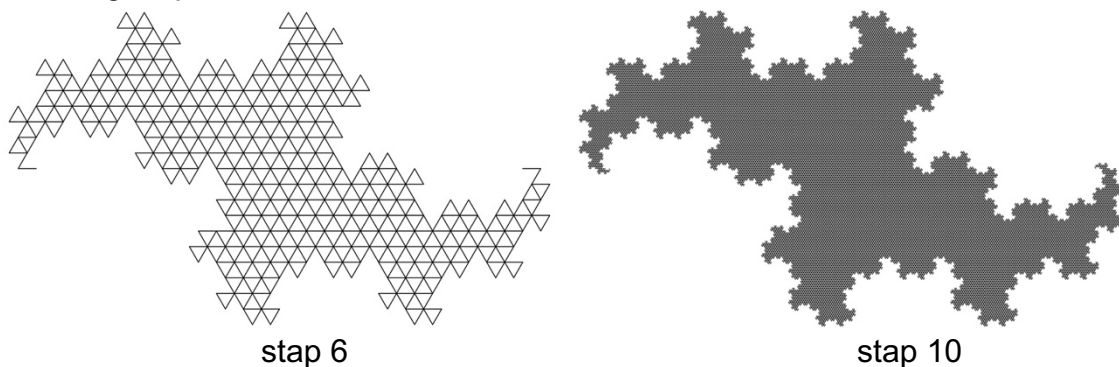
Bij de constructie van een fractal wordt het lijnstuk met lengte 1 (stap 0) vervangen door een aantal aaneengesloten lijnstukken. In het geval van de Terdragon zijn dit drie lijnstukken met lengte $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, zodanig dat het middelste lijnstuk verticaal staat.



In stap 2 is elk van de drie lijnstukken van stap 1 op dezelfde manier vervangen door drie lijnstukken. Op dezelfde manier is stap 3 ontstaan na bewerking van alle 9 lijnstukken van stap 2.



Hier nog stap 6 en 10:



De lijnstukken worden bij elke volgende stap kleiner. De verkleiningsfactor bij de Terdragon is $\sqrt{3}$. Het aantal lijnstukken verdrievoudigt bij elke volgende stap. Omdat bij elke volgende stap alle lijnstukken op dezelfde manier bewerkt worden als bij de overgang van stap 0 naar stap 1, is stap 1 bepalend voor hoe de fractal er uiteindelijk uit gaat zien.

Een fractal is vlakvullend als aan twee voorwaarden wordt voldaan:

1. de dimensie is 2, en
2. de lijnstukken snijden elkaar niet en overlappen elkaar ook niet.

Dimensie

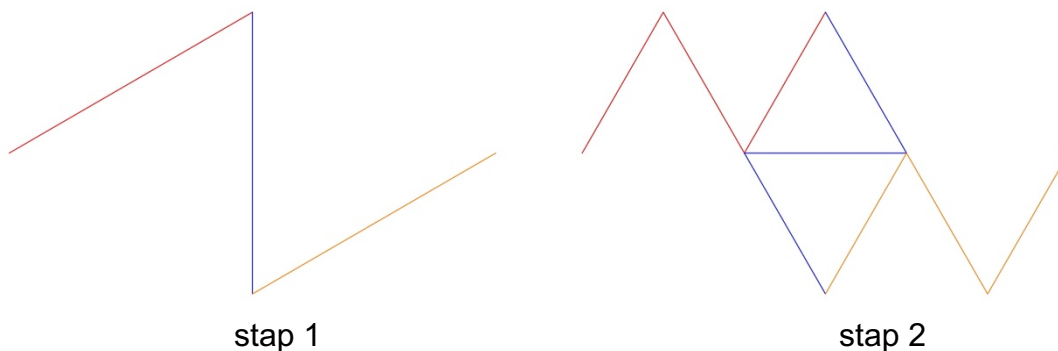
De dimensie van een fractal waarvan de lijnstukken in stap 1 alle dezelfde lengte hebben, kan met de formule van Hausdorff berekend worden:

$$d = \frac{\log(\text{aantal kopiën})}{\log(\text{verkleiningsfactor})}$$

Voor de Terdragon wordt dat: $d = \frac{\log(3)}{\log(\sqrt{3})} = 2$. Aan voorwaarde 1 is dus voldaan.

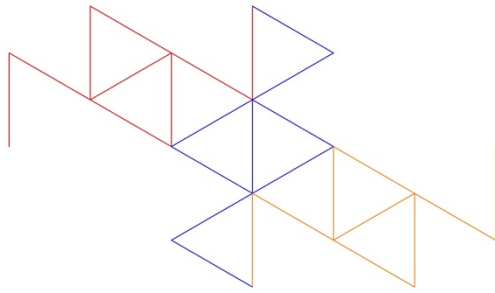
Snijden en overlappen

Om te laten zien, dat de lijnstukken van een fractal elkaar niet snijden of overlappen, worden de lijnstukken van stap 1 van verschillende kleuren voorzien:

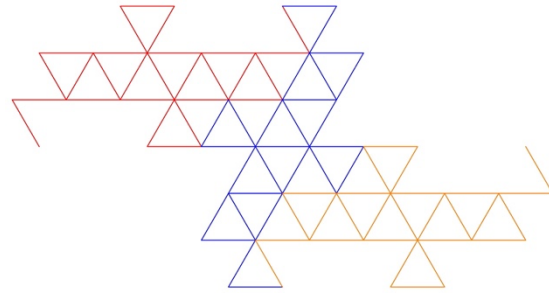


Vervolgens worden in stap 2 de kleuren gehandhaafd. Drie keer stap 1 is dan goed herkenbaar. Ook is te zien, dat de fractal zichzelf alleen raakt in de hoekpunten. Er zijn geen snijdende of overlappende lijnstukken.

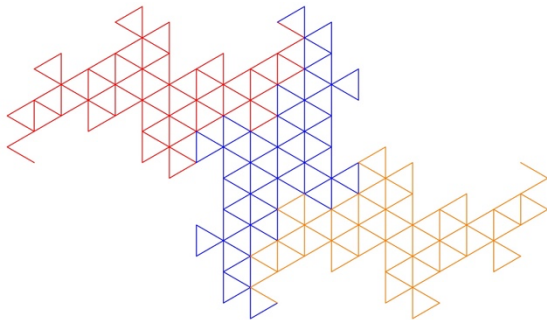
In stap 3 is drie keer een stap 2 herkenbaar, in stap 4 drie keer een stap 3, enz.



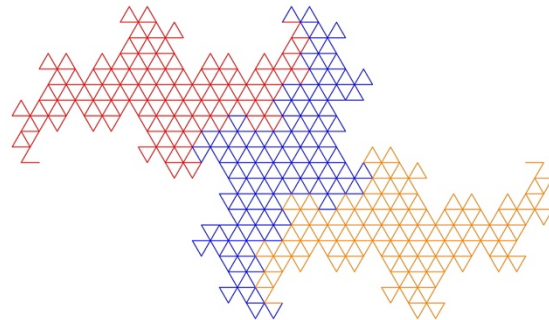
stap 3



stap 4



stap 5



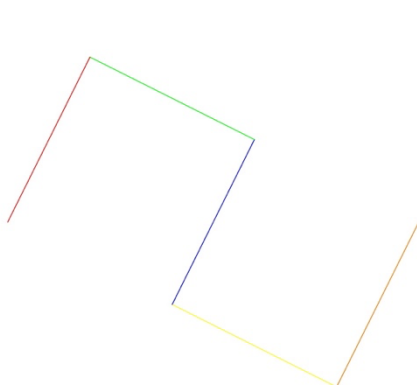
stap 6

Het is duidelijk, dat elke stap bestaat uit drie kopieën van de vorige stap en dat de linker en rechter kopieën de middelste kopie alleen raakt in de hoekpunten. Dat maakt dat er geen snijdende of overlappende lijnstukken zijn.

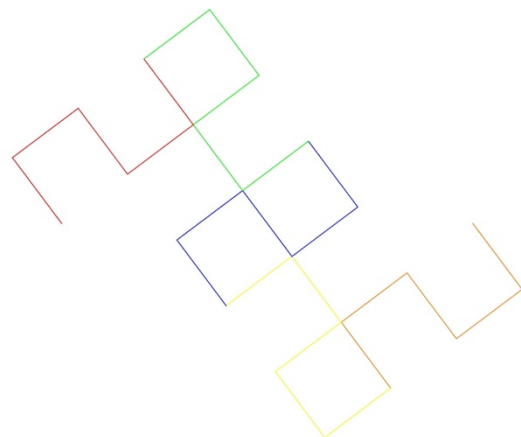
Daarmee is aan beide voorwaarden voldaan en dus is de Terdragon fractal vlakvullend.

5-Dragon

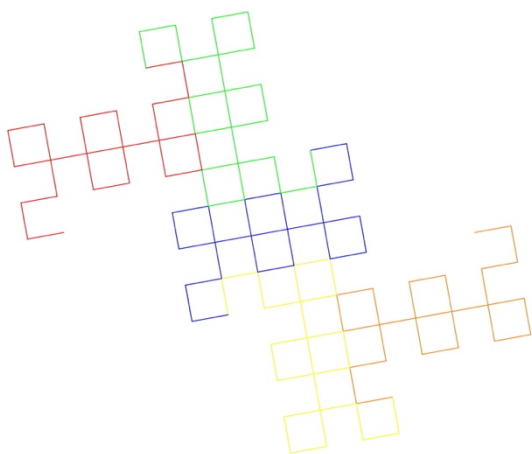
Bij de 5-Dragon wordt het lijnstuk met lengte 1 (stap 0) vervangen door vijf lijnstukken met lengte $\frac{1}{5}\sqrt{5}$, zodanig dat de lijnstukken loodrecht op elkaar staan. De lijnstukken zijn meteen in kleur weergegeven; stap 0 laat ik weg.



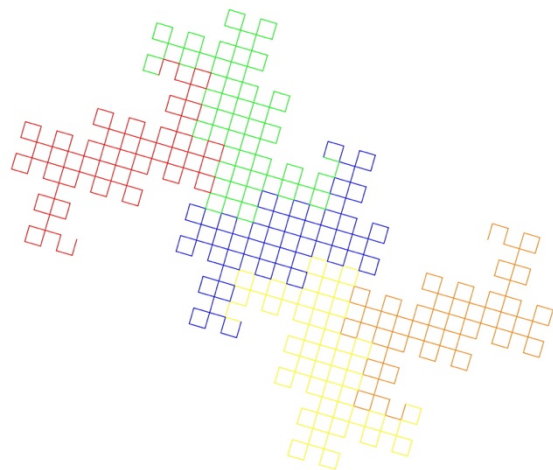
stap 1



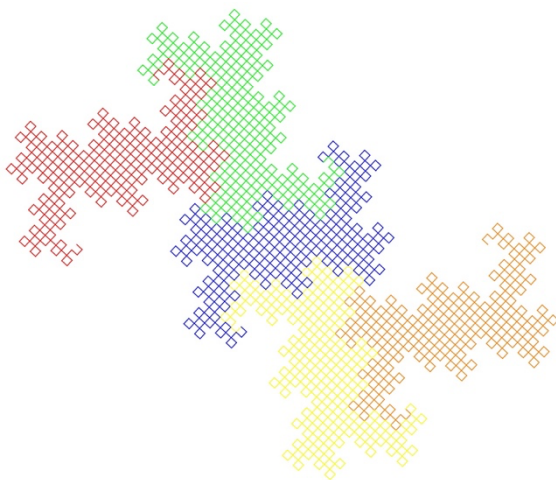
stap 2



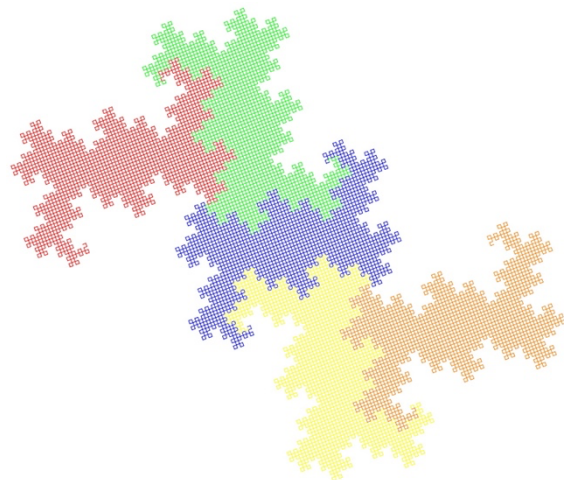
stap 3



stap 4



stap 5



stap 6

De verkleiningsfactor bij de 5-Dragon is $\sqrt{5}$. Het aantal lijnstukken vervijfvoudigt bij elke volgende stap.

Dimensie

De dimensie van een fractal waarvan de lijnstukken in stap 1 alle dezelfde lengte hebben, kan met de formule van Hausdorff berekend worden:

Voor de 5-Dragon wordt dat: $d = \frac{\log(5)}{\log(\sqrt{5})} = 2$. Aan de eerste voorwaarde is dus voldaan.

Snijden en overlappen

Aan de plaatjes in kleur hierboven is te zien dat in elke stap de vijf kopieën van de voorgaande stap elkaar alleen raken in de hoekpunten. Dat maakt dat er geen snijdende of overlappende lijnstukken zijn.

Daarmee is aan beide voorwaarden voldaan en dus is de 5-Dragon fractal vlakvullend.

Eend-kromme

Om fractals te vinden die niet in een vierkant of driehoekig rooster liggen, zijn er een aantal overwegingen:

- de fractal moet symmetrie hebben (anders wordt het al gauw een chaos)
- de fractal moet een dimensie 2 hebben
- de lijnstukken hoeven niet allemaal even lang te zijn

Deze laatste twee punten vereisen een andere methode om de dimensie van een fractal te berekenen, omdat de formule van Hausdorff alleen geldt voor fractals waarvan de lijnstukken alle dezelfde lengte hebben.

Dimensie berekening

Mandelbrot heeft in zijn boek “The Fractal Geometry of Nature” voor deze berekening wel een suggestie (pag 56 en 57). Hij redeneert als volgt:

- a. als de dimensie 1 is (dus de fractal ligt op een rechte lijn), dan is de som van de lijnstukken 1 (namelijk de afstand tussen $(0, 0)$ en $(1, 0)$). In formule:
 $r_1 + r_2 + \dots + r_n = 1$, ofwel $\sum_{m=1}^n r_m = 1$, waarbij r_m de lengtes van de lijnstukken zijn.
- b. bij een fractal met n gelijke lijnstukken met lengte r is de verkleiningsfactor $\frac{1}{r}$.

De dimensie is dan $d = \frac{\log(n)}{\log(\frac{1}{r})} = \frac{1}{r} \log(n)$.

Dit is te herschrijven als: $\left(\frac{1}{r}\right)^d = n \rightarrow r^d = \frac{1}{n} \rightarrow nr^d = 1$, ofwel $\sum_{m=1}^n r^d = 1$.

Door beide bovenstaande redeneringen te combineren komt Mandelbrot tot de suggestie, dat de dimensie van een fractal met lijnstukken van ongelijke lengte is te berekenen met de dimensie-genererende functie $G(d) = \sum_{m=1}^n r_m^d$, waarbij de dimensie d de unieke reële wortel is van de vergelijking $G(d) = 1$.

Anders gezegd: bereken de dimensie d door d op te lossen uit de vergelijking

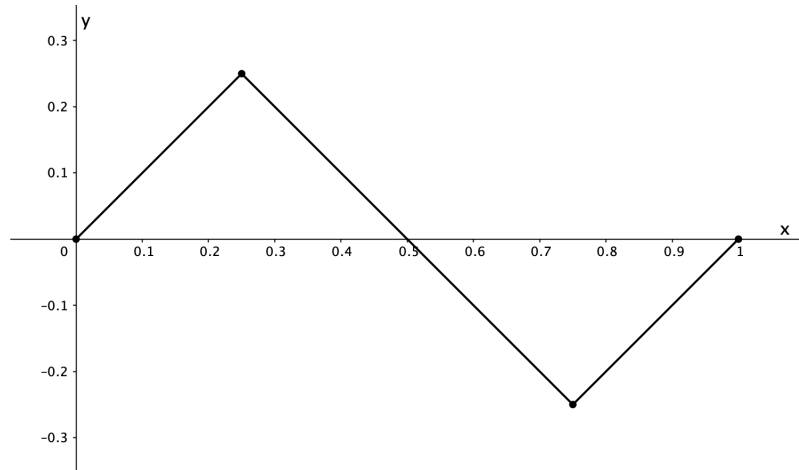
$$\sum_{m=1}^n r_m^d = 1.$$

Bewijs hiervoor heeft Mandelbrot niet, maar in alle gevallen waar hij dit toegepast heeft, klopt het.

Voorbeeld

Mandelbrot geeft hierbij een voorbeeld (pag 67), waarbij de eerste stap van de fractal er als onderstaand uit ziet:

De hoekpunten liggen op $(0, 0)$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ en $(1, 0)$. De lengtes van de lijnstukken zijn resp. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\frac{1}{4}\sqrt{2}$.



Om de dimensie d te berekenen lossen we de vergelijking

$$\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^d + \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^d = 1 \text{ op.}$$

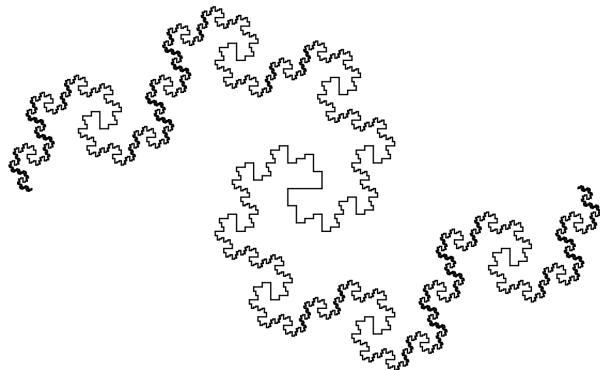
Bedenk, dat $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$ en $\frac{1}{4}\sqrt{2} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-1\frac{1}{2}} = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^3$.

$$\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{3d} + \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^d + \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{3d} = 1 \rightarrow 2^{-\frac{d}{2}} + 2 \cdot 2^{-\frac{3d}{2}} = 1$$

$$2^{\frac{2d}{2}} + 2 = 2^{\frac{3d}{2}} \rightarrow \left(2^{\frac{d}{2}}\right)^3 - \left(2^{\frac{d}{2}}\right)^2 - 2 = 0$$

Dit is een derdegraads vergelijking van $2^{\frac{d}{2}}$. Met behulp van de formule van Cardano (of van internet) levert dat: $2^{\frac{d}{2}} \approx 1,69562077 \rightarrow d \approx 2 \cdot \log 1,69562077 \approx 1,5236$.

Hiernaast zien we stap 8 van deze fractal. De dimensie van ongeveer 1,5 kan goed kloppen, want deze fractal is zeker niet vlakvullend (dimensie 2) en ook verre van een rechte lijn (dimensie 1).



Vlakvullende fractals

Het berekenen van de dimensie kan leiden tot het oplossen van lastige vergelijkingen. Nu willen wij bij onze zoektocht naar vlakvullende fractals, dat de fractal een dimensie 2 heeft.

We vullen in $d = 2$ en krijgen dus $\sum_{m=1}^n r_m^2 = 1$, als extra voorwaarde voor het berekenen van de lengtes van de lijnstukken.

Vlakvullende fractal met drie lijnstukken

Laten we om te beginnen eens verder gaan met het voorbeeld hierboven van Mandelbrot. We nemen een fractal die in de eerste stap begint en eindigt met twee lijnstukken met gelijke lengte en daar tussen een lijnstuk waarvan het midden op $(\frac{1}{2}, 0)$ ligt. Dit doen we om de fractal symmetrie te geven.

We noemen de lengte van het middelste lijnstuk a en van de andere twee b . Voor deze lengtes geldt:

$$b^2 + a^2 + b^2 = 1, \text{ ofwel}$$

$a^2 + 2b^2 = 1$. Dat betekent, dat als we een waarde voor a nemen, we de waarde van b kunnen uitrekenen, en andersom.

Liever werken we met een verhouding tussen a en b en daarom stellen we: $a = k \cdot b$, waarbij de factor k aangeeft hoeveel keer groter a is dan b .

We krijgen dan:

$$(kb)^2 + 2b^2 = 1 \rightarrow k^2b^2 + 2b^2 = 1 \rightarrow b^2(k^2 + 2) = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{k^2 + 2} \rightarrow b = \sqrt{\frac{1}{k^2 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2}}$$

$$a = kb = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 2}}$$

De cosinusregel in de bovenste driehoek geeft:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{k^2}{4(k^2 + 2)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{k^2 + 2} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2}} \cos \alpha$$

$$\frac{1}{\sqrt{k^2 + 2}} \cos \alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{k^2 + 2} - \frac{k^2}{4(k^2 + 2)}$$

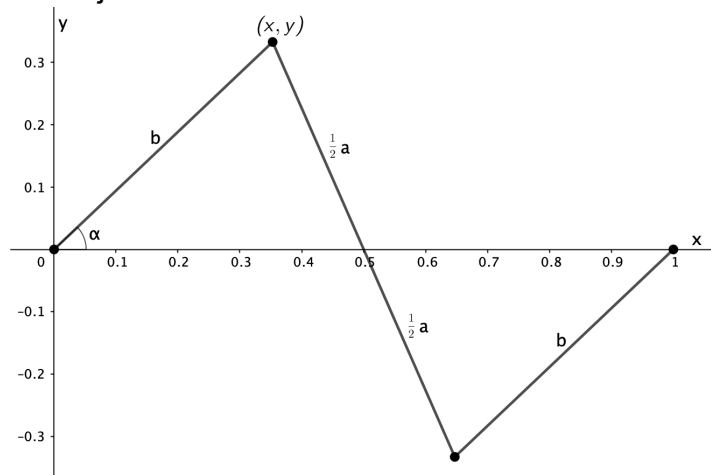
$$\cos \alpha = \left[\frac{k^2 + 2}{4(k^2 + 2)} + \frac{4}{4(k^2 + 2)} - \frac{k^2}{4(k^2 + 2)} \right] \sqrt{k^2 + 2} = \frac{6}{4(k^2 + 2)} \sqrt{k^2 + 2} = \frac{3}{2\sqrt{k^2 + 2}}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{2\sqrt{k^2 + 2}} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{4(k^2 + 2)}} \\ &= \sqrt{\frac{4(k^2 + 2)}{4(k^2 + 2)} - \frac{9}{4(k^2 + 2)}} = \sqrt{\frac{4k^2 + 8 - 9}{4(k^2 + 2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4k^2 - 1}{k^2 + 2}} \end{aligned}$$

$$x = b \cdot \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2}} \cdot \frac{3}{2\sqrt{k^2 + 2}} = \frac{3}{2(k^2 + 2)}$$

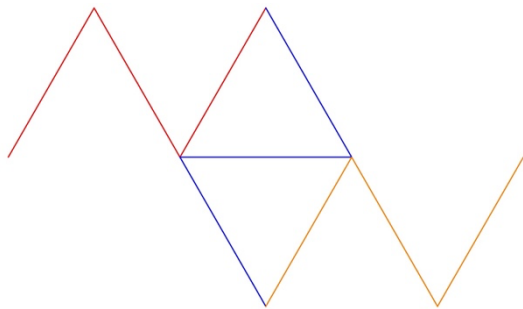
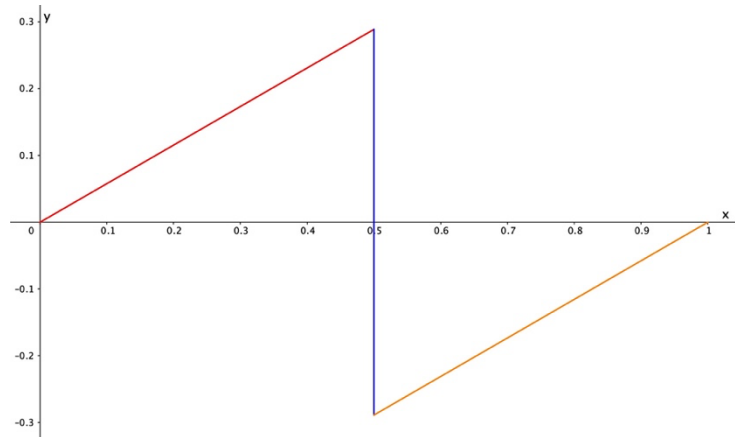
$$y = b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4k^2 - 1}{k^2 + 2}} = \frac{\sqrt{4k^2 - 1}}{2(k^2 + 2)}$$

We hebben nu formules voor a , b , x en y , uitgedrukt in k . We gaan wat experimenteren door een aantal waarden voor k in te vullen.

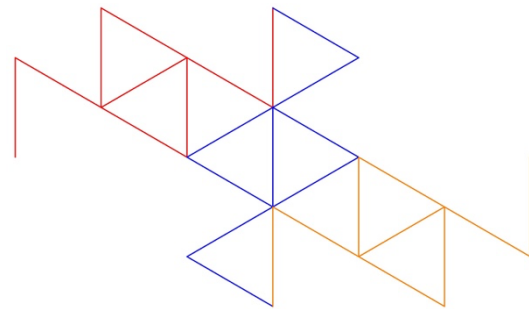


$k = 1$

Voor $k = 1$ krijgen we een al bekende fractal, namelijk de Terdragon, waarvan we al gezien hebben dat deze vlakvullend is.



stap 2



stap 3

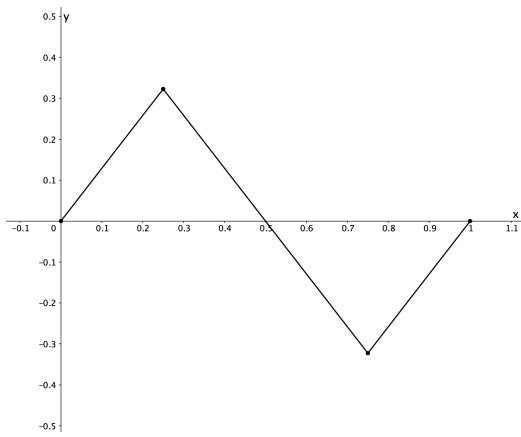
$k = 2$

Voor $k = 2$ hebben we dezelfde verhoudingen in de lengtes van de lijnstukken als bij het voorbeeld van Mandelbrot. Het verschil is dat we nu een dimensie 2 hebben.

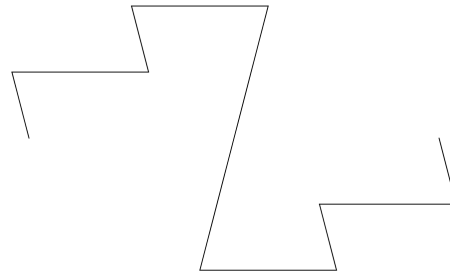
$$a = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2}} = \frac{1}{3}\sqrt{6} \text{ en } b = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2}} = \frac{1}{6}\sqrt{6}.$$

De coördinaten van de hoekpunten zijn: $(0, 0)$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{12}\sqrt{15})$, $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{12}\sqrt{15})$ en $(1, 0)$.

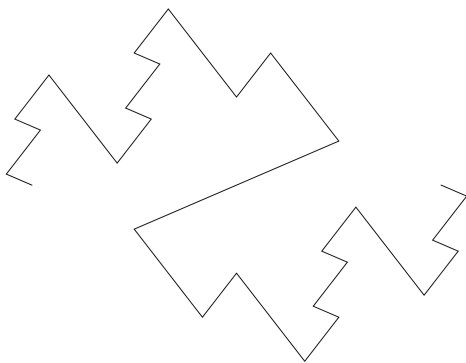
Er dient zich een interessant verschijnsel aan bij stap 4: de fractal raakt zichzelf in twee hoekpunten. Bij stap 5 en 6 raakt de fractal zichzelf in nog meer hoekpunten. Helaas zien we bij stap 6 ook dat lijnstukken elkaar gaan snijden, en dat wordt nog talrijker bij volgende stappen. Deze fractal is daarom niet vlakvullend.



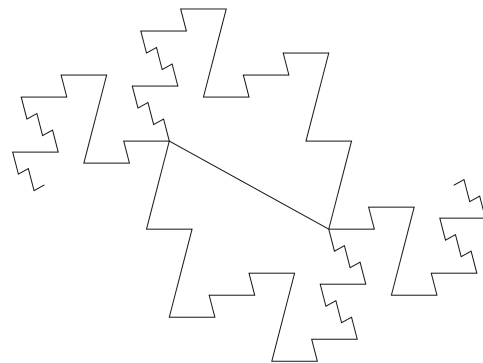
stap 1



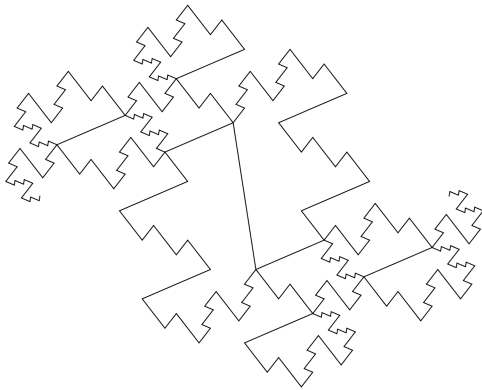
stap 2



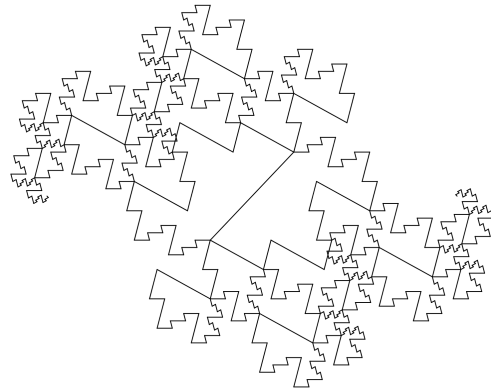
stap 3



stap 4



stap 5



stap 6

$$k = \sqrt{2}$$

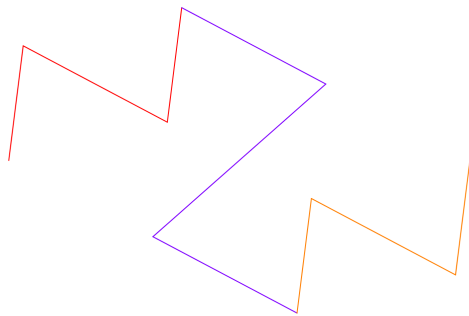
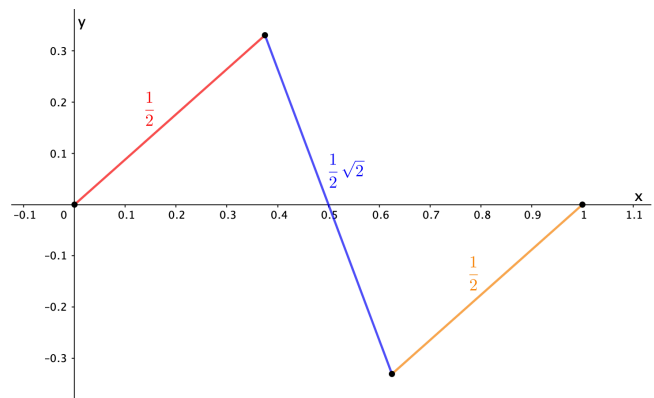
Voor $k = \sqrt{2}$ krijgen we:

$$a = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ en}$$

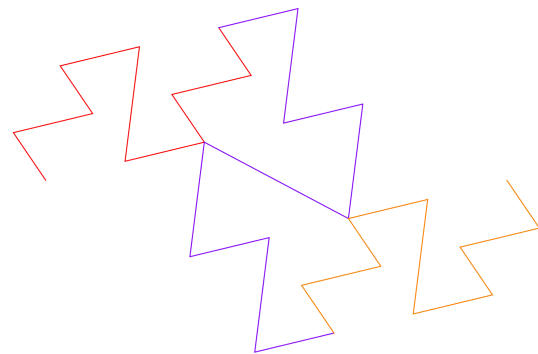
$$b = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2+2}} = \frac{1}{2}.$$

De coördinaten van de hoekpunten zijn: $(0, 0)$, $(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\sqrt{7})$, $(\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\sqrt{7})$ en $(1, 0)$.

Stap 1 ziet er als hiernaast uit.

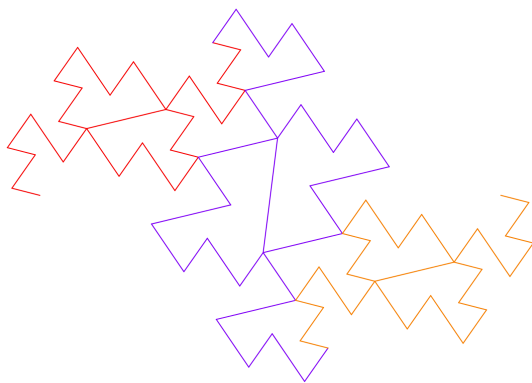


stap 2

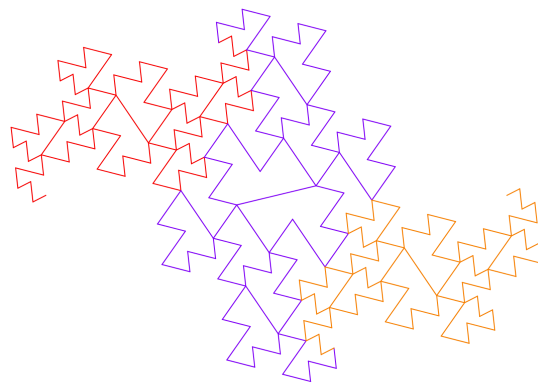


stap 3

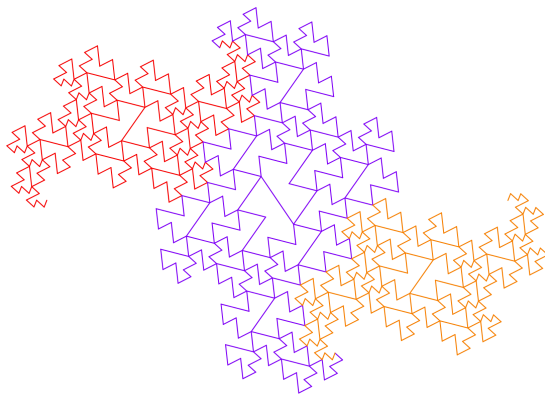
Bij stap 3 zien we voor het eerst dat de fractal zichzelf raakt. In de ingesloten vorm kun je met enige fantasie een eend zien, en punt-symmetrisch daaronder nog een. Dat is de reden dat ik deze fractal de **Eend-kromme** noem (Duck-curve) en de ingesloten vorm de **Eend-figuur**.



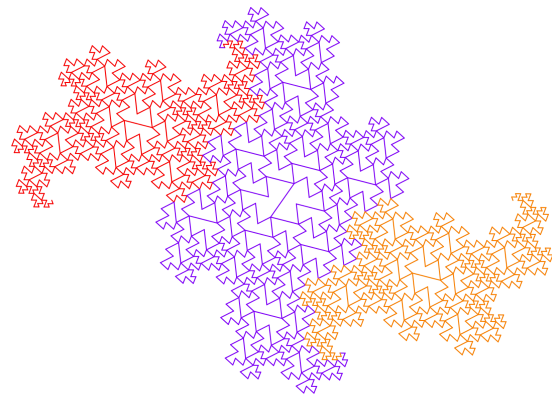
stap 4



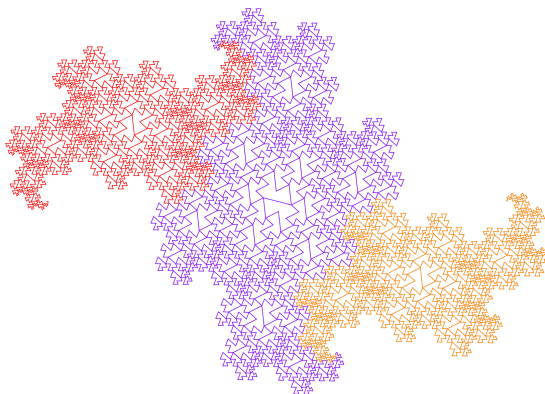
stap 5



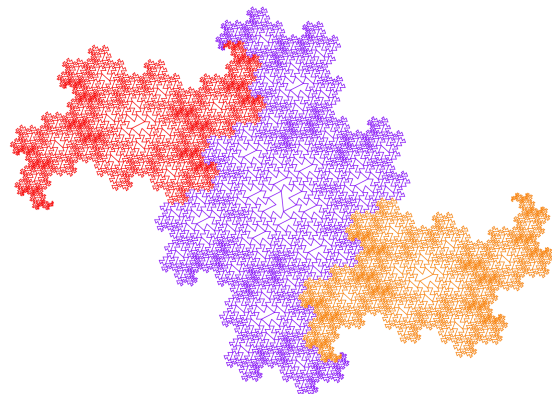
stap 6



stap 7



stap 8



stap 9

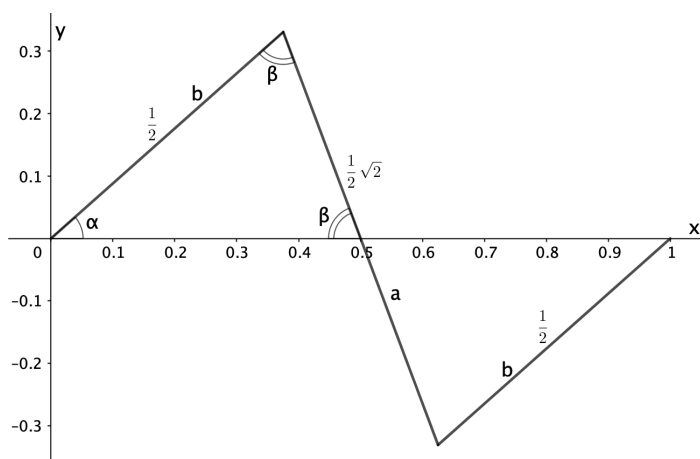
De dimensie van deze fractal is 2 en er zijn geen snijdende of overlappende lijnstukken. De fractal is dus vlakvullend.

De Eend-figuur die in stap 3 ontstaat, zien we in stap 4 in twee kleinere formaten terug, en wel een factor $\sqrt{2}$ en 2 kleiner. In stap 5 zijn er drie formaten, die een factor 2, $2\sqrt{2}$ en 4 kleiner zijn dan de Eend-figuur in stap 3. Bij elke volgende stap wordt het aantal formaten met 1 opgehoogd en worden de Eend-figuren steeds kleiner.

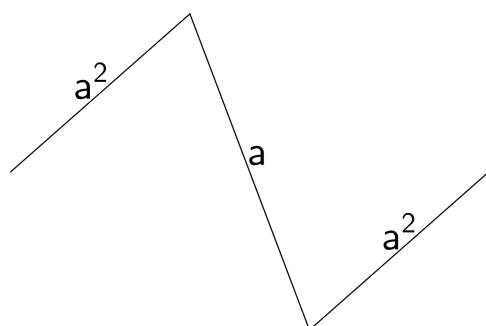
Bijzonder is ook, dat op de overgangen van de ene kleur op de andere nieuwe Eend-figuren ontstaan.

Kijken we nog eens naar stap 1 van de Eend-kromme. Het gedeelte boven de x -as vormt, samen met de x -as, een gelijkbenige driehoek. Dus geldt:

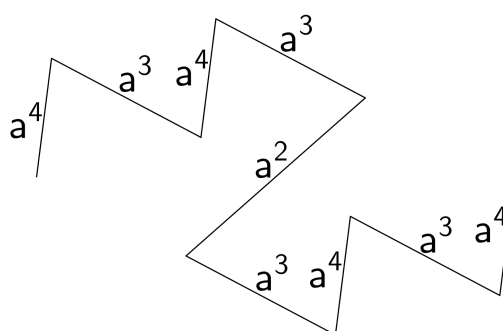
Toepassen van deze stap 1 geeft dus met lijnstuk b : een



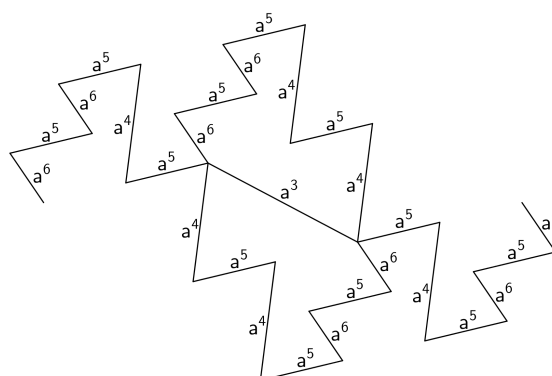
verdraaiing over een hoek α en een verkleining met factor $\frac{1}{2}$. Met lijnstuk a geeft dat een verdraaiing over een hoek $-\beta$ en een verkleining met factor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wanneer deze laatste nogmaals wordt toegepast is de verdraaiing over een hoek $-2\beta = -2\left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = -180^\circ + \alpha$ en een verkleining met factor $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Dit geeft een evenwijdig lijnstuk en verkleining als bij één keer van lijnstuk b . Dat betekent dat we de toepassing van lijnstuk b kunnen schrijven als a^2 . Nogmaals toepassen van lijnstuk a schrijven we als a^3 , enz. Dit wordt geïllustreerd in onderstaande drie stappen.



step 1



step 2



step 3

Elk lijnstuk in een stap wordt in de volgende stap vervangen door drie lijnstukken, waarbij de exponent van de a met 2, 1 en 2 wordt verhoogd. Bij stap n variëren de exponenten van n tot en met $2n$, waarbij lijnstukken met gelijke exponenten gelijke lengte hebben en evenwijdig aan elkaar zijn.

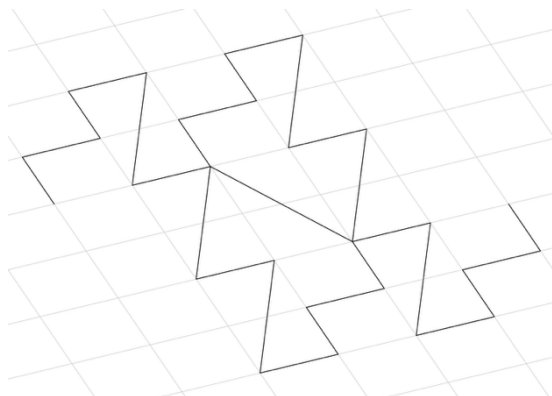
Conclusie: over alle stappen heen zijn alle lijnstukken van een bepaalde lengte evenwijdig aan elkaar. Dat betekent ook dat alle Eend-figuren van een bepaald formaat gelijk georiënteerd zijn, of 180° gedraaid zijn.

Overigens: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{7}\right) \approx 41,4096^\circ$

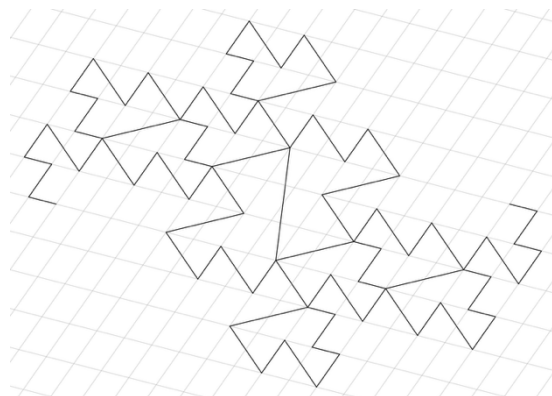
Rooster

Herman Haverkot laat zien op welk rooster van parallellogrammen de Eend-kromme is gebaseerd en hoe dat rooster bij elke stap verandert. Ook geeft Haverkot een formeel bewijs dat de Eend-kromme vlakvullend is.

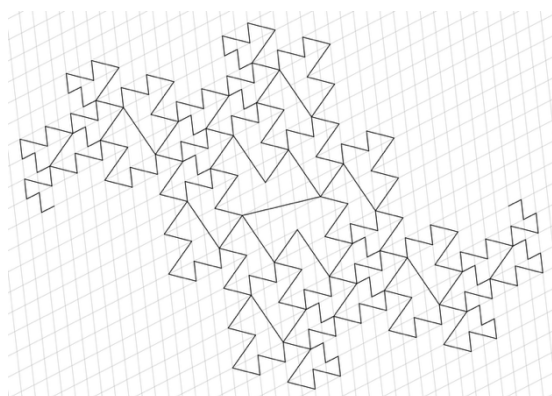
Hier zijn van een aantal stappen de roosters ingetekend.



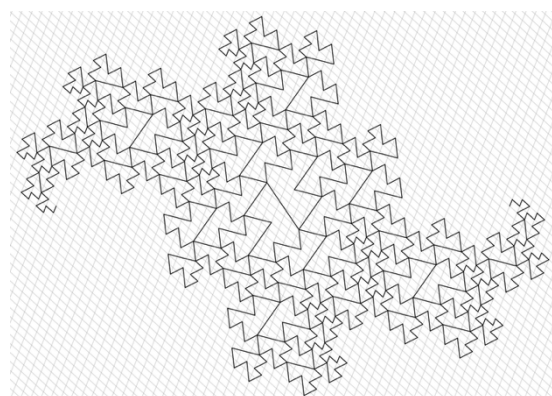
stap 3



stap 4



stap 5



stap 6

De parallellogrammen hebben zijden waarvan de lengtes een verhouding van $1 : \sqrt{2}$ hebben. De korte diagonaal is even lang als de lange zijde.

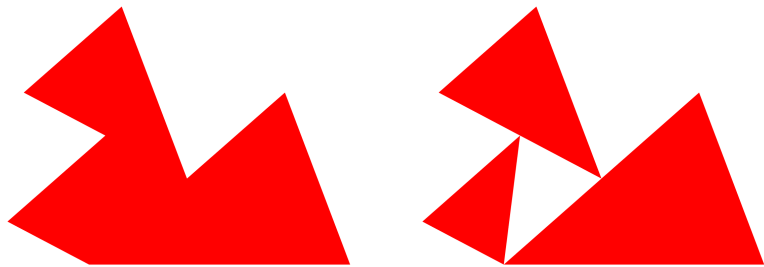
Bij elke stap draait het rooster over een hoek α en de parallellogrammen worden gehalveerd.

Eend-figuur

De Eend-figuur heeft een aantal bijzondere eigenschappen.

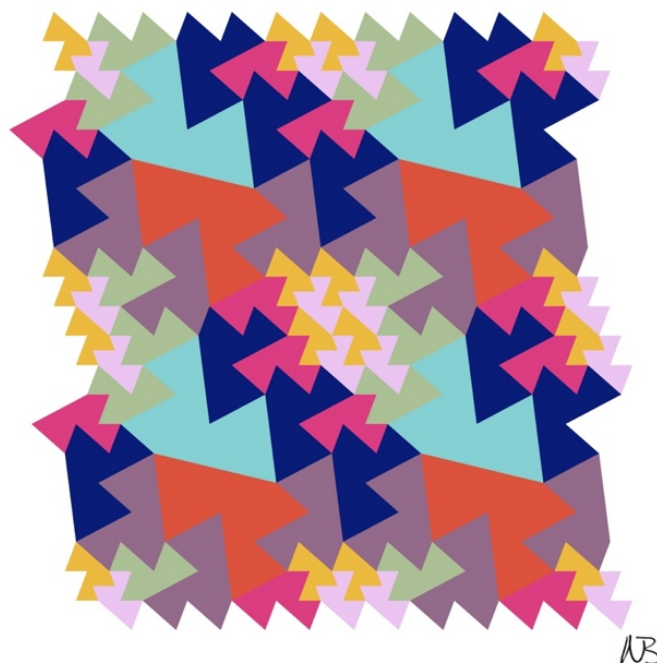
Allereerst is hiernaast te zien dat deze figuur opgebouwd is uit vier gelijkbenige driehoeken die bovendien gelijkvormig

zijn. De verhoudingen tussen de zijden van de driehoeken $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ en 1.



De symmetrieas van de middelgrote driehoek staat loodrecht op het midden van de lange zijde van de grote driehoek; hetzelfde geldt voor de kleine rode en middelgrote driehoek. De ingesloten witte driehoek is congruent met de kleine rode driehoek. Doordat de maten van de grote, middelgrote en kleine driehoeken een verhouding hebben van 2, $\sqrt{2}$ en 1, is de korte zijde van de grote driehoek even lang als de lange zijde van de middelgrote driehoek. Daarnaast is de halve lange zijde van de grote driehoek even lang als de korte zijde van de middelgrote driehoek. Deze even lange stukken lopen bovendien evenwijdig aan elkaar. Hetzelfde geldt uiteraard voor de middelgrote en kleine rode driehoek.

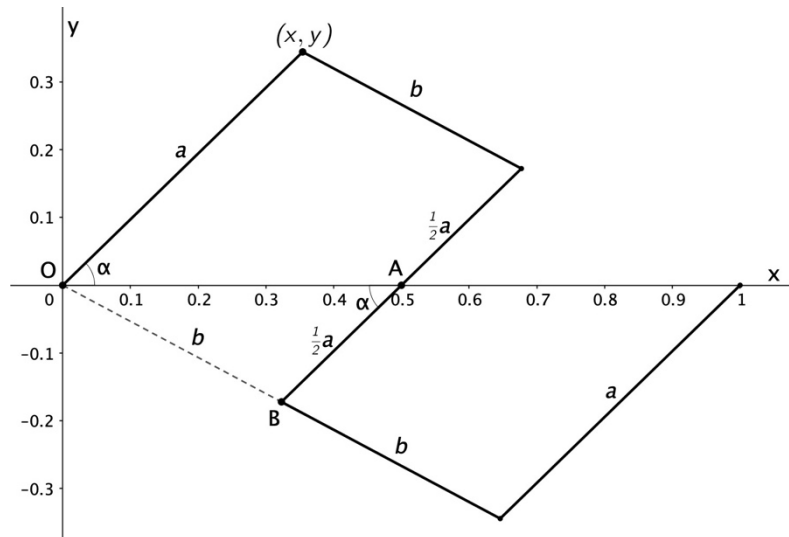
Door de bijzondere eigenschappen van de Eend-figuur zijn verschillende formaten op diverse manieren op elkaar aan te sluiten. Dat geeft allerlei mogelijkheden om vlakvullingen te construeren. Hieronder een voorbeeld met vier formaten.



Vogelnestjes

Een andere mogelijkheid is een variant te maken op de 5-Dragon. De 5-Dragon bestaat uit 5 lijnstukken met een lengte van $\frac{1}{5}\sqrt{5}$. Vanwege de symmetrie wordt nu gekozen voor drie lijnstukken met lengte a en twee met lengte b . Zie onderstaande figuur.

Om de dimensie 2 te laten zijn, geldt: $3a^2 + 2b^2 = 1$.
We kiezen weer voor de verhouding k tussen a en b :
 $a = kb$.



Hiermee drukken we a en b uit in k :

$$3(kb)^2 + 2b^2 = 1 \rightarrow 3k^2b^2 + 2b^2 = 1 \rightarrow b^2(3k^2 + 2) = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{3k^2 + 2} \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3k^2 + 2}}$$

$$a = kb = \frac{k}{\sqrt{3k^2 + 2}}$$

Toepassen van de cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft:

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{1}{3k^2 + 2} = \frac{1}{4} + \frac{k^2}{4(3k^2 + 2)} - \frac{k}{2\sqrt{3k^2 + 2}} \cos \alpha$$

$$\frac{k}{2\sqrt{3k^2 + 2}} \cos \alpha = \frac{1}{4} + \frac{k^2}{4(3k^2 + 2)} - \frac{1}{3k^2 + 2}$$

$$\cos \alpha = \left[\frac{3k^2 + 2}{4(3k^2 + 2)} + \frac{k^2}{4(3k^2 + 2)} - \frac{4}{4(3k^2 + 2)} \right] \frac{2\sqrt{3k^2 + 2}}{k}$$

$$= \frac{4k^2 - 2}{4(3k^2 + 2)} \cdot \frac{2\sqrt{3k^2 + 2}}{k} = \frac{2k^2 - 1}{k\sqrt{3k^2 + 2}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2k^2 - 1}{k\sqrt{3k^2 + 2}} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(2k^2 - 1)^2}{k^2(3k^2 + 2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{k^2(3k^2 + 2)}{k^2(3k^2 + 2)} - \frac{4k^4 - 4k^2 + 1}{k^2(3k^2 + 2)}} = \sqrt{\frac{3k^4 + 2k^2 - 4k^4 + 4k^2 - 1}{k^2(3k^2 + 2)}} = \frac{\sqrt{-k^4 + 6k^2 - 1}}{k\sqrt{3k^2 + 2}}$$

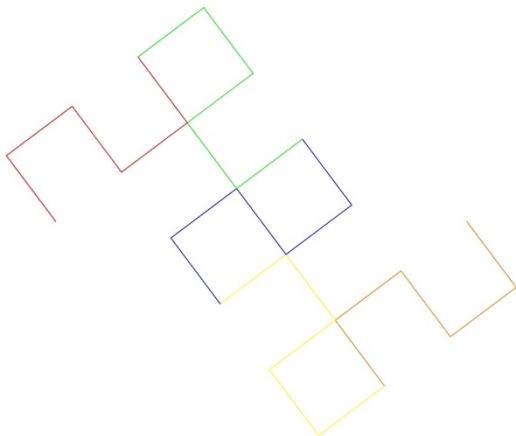
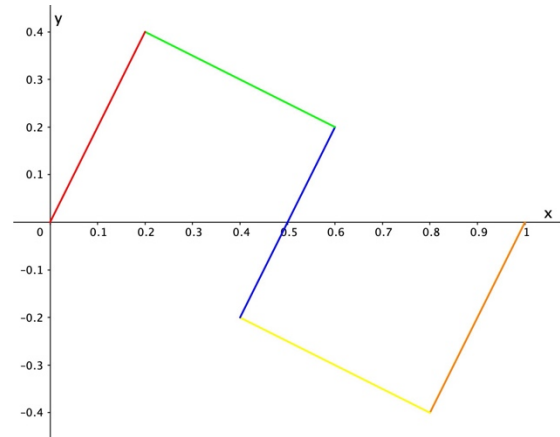
$$x = a \cdot \cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{3k^2+2}} \cdot \frac{2k^2-1}{k\sqrt{3k^2+2}} = \frac{2k^2-1}{3k^2+2}$$

$$y = a \cdot \sin \alpha = \frac{k}{\sqrt{3k^2+2}} \cdot \frac{\sqrt{-k^4+6k^2-1}}{k\sqrt{3k^2+2}} = \frac{\sqrt{-k^4+6k^2-1}}{3k^2+2}$$

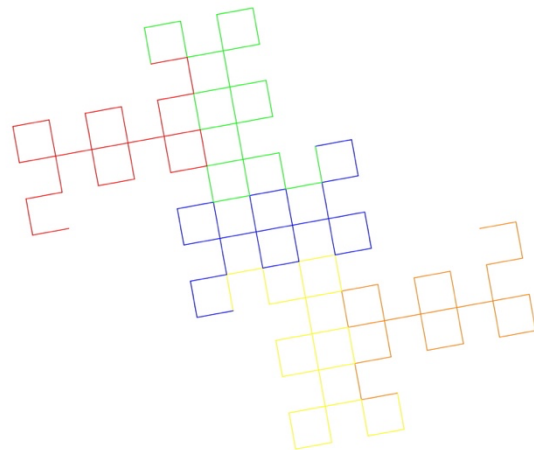
We vullen nu enkele waarden voor k in.

$k = 1$

Voor $k = 1$ krijgen we een al bekende fractal, namelijk de 5-Dragon, waarvan we al gezien hebben dat deze vlakvullend is.



stap 2



stap 3

$k = \sqrt{2}$

Voor $k = \sqrt{2}$ krijgen we:

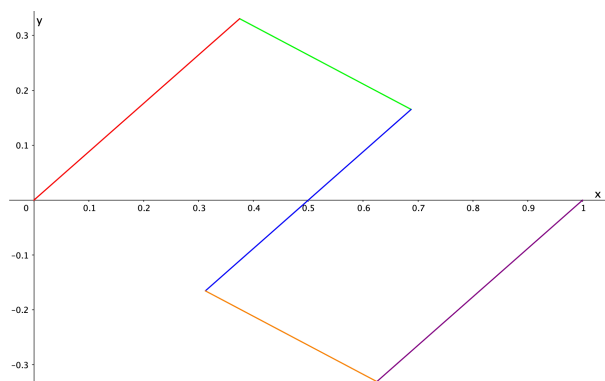
$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3 \cdot 2 + 2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

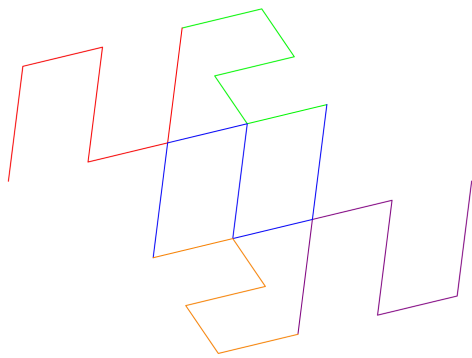
$$b = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

De coördinaten van de hoekpunten zijn

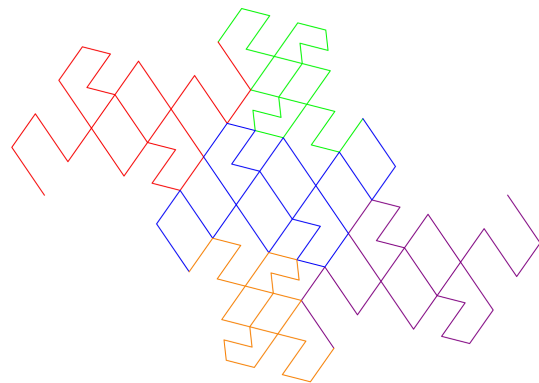
resp.: $(0, 0)$, $(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\sqrt{7})$, $(\frac{11}{16}, \frac{1}{16}\sqrt{7})$, $(\frac{5}{16}, -\frac{1}{16}\sqrt{7})$, $(\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\sqrt{7})$ en $(1, 0)$.

Stap 1 ziet er als hiernaast uit.





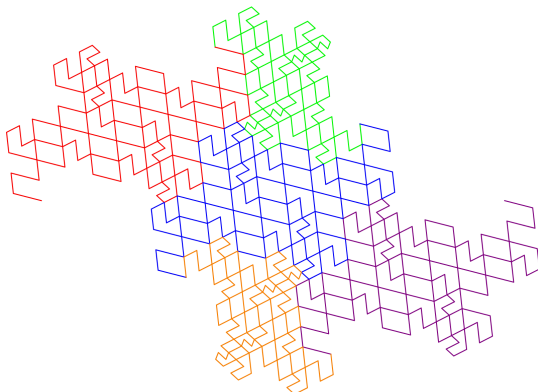
stap 2



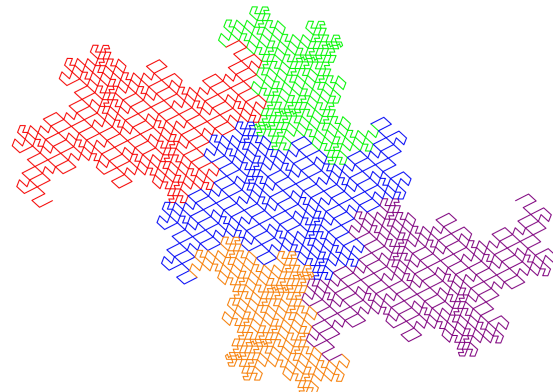
stap 3

Bij stap 2 zien we dat de fractal zichzelf raakt. In de ingesloten vorm bovenaan kun je met enige fantasie een vogel zien, en het parallellogram daaronder is het nest. Dat is de reden dat ik deze fractal **Vogelnestjes** noem.

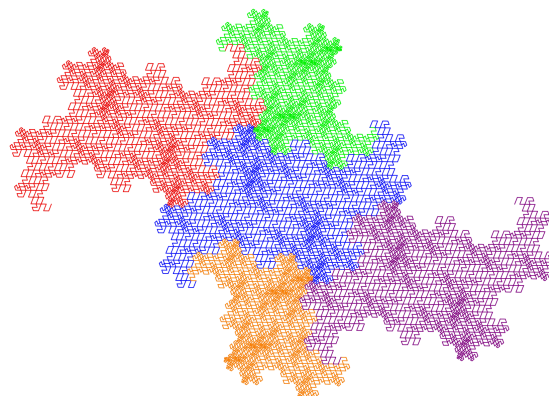
De dimensie van deze fractal is 2 en er zijn geen snijdende of overlappende lijnstukken. De fractal is dus vlakvullend.



stap 4



stap 5



stap 6

Terwijl de Eend-kromme bestaat uit allemaal gelijkvormige figuren, bestaat deze fractal uit twee verschillende figuren. In stap 2 hebben deze twee verschillende

figuren wel gelijke oppervlakte. De formaten in die opeenvolgende stappen worden sneller kleiner dan bij de Eend-kromme. De aantallen figuren gaan ook sneller omhoog.

Over alle stappen heen zijn alle lijnstukken van een bepaalde lengte evenwijdig aan elkaar. Dat betekent ook dat alle figuren van een bepaald formaat gelijk georiënteerd zijn, of 180° gedraaid zijn.

Gelijke contouren

Wat opvalt aan stap 9 van de Eend-kromme en stap 6 van de Vogelnestjes fractal, is dat de contouren heel erg op elkaar lijken. Dat gaan we eens nader bekijken.

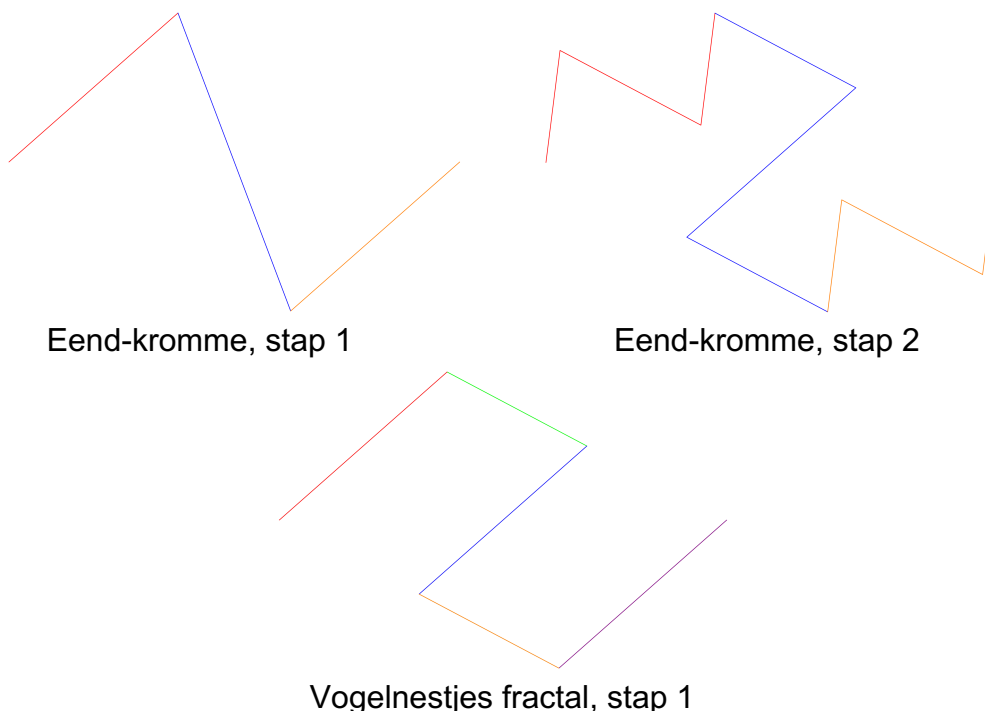
De coördinaten van de twee hoekpunten van stap 1 van de Eend-kromme zijn:

$\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\sqrt{7}\right)$ en $\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\sqrt{7}\right)$. En de coördinaten van de vier hoekpunten van stap 1 van de Vogelnestjes fractal zijn:

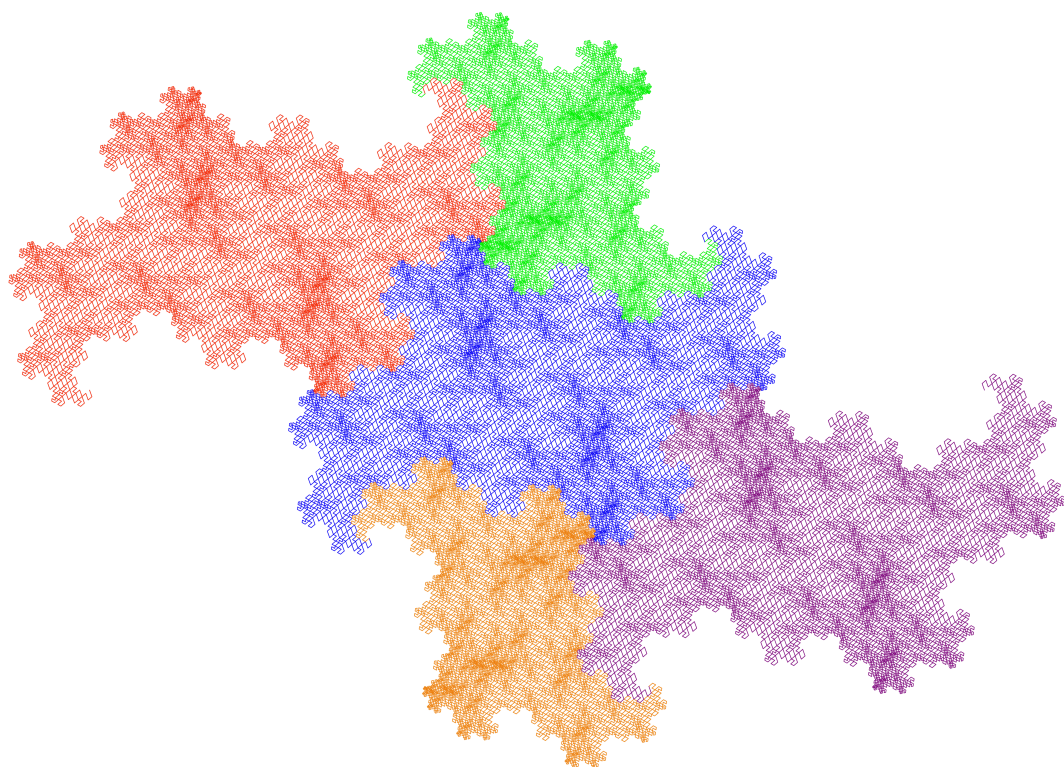
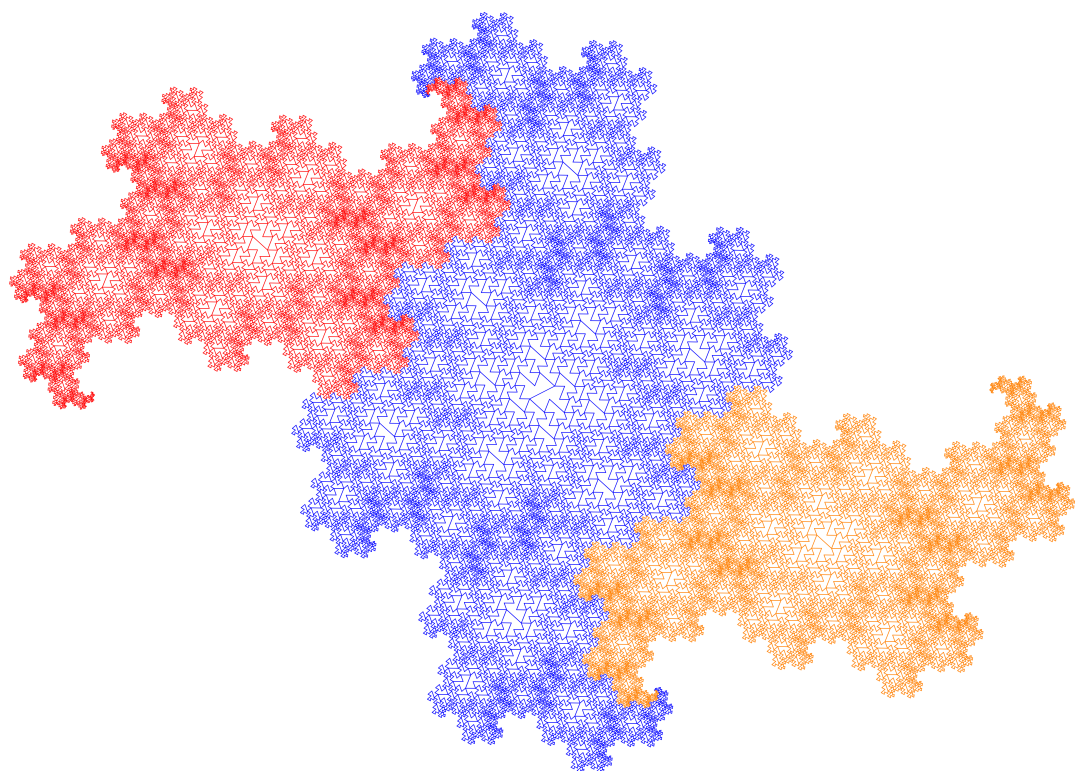
$\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\sqrt{7}\right), \left(\frac{11}{16}, \frac{1}{16}\sqrt{7}\right), \left(\frac{5}{16}, -\frac{1}{16}\sqrt{7}\right)$ en $\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\sqrt{7}\right)$.

De eerste en de laatste zijn gelijk aan elkaar!

Hieronder staan stap 1 en 2 van de Eend-kromme en stap 1 van de Vogelnestjes fractal nogmaals afgebeeld. Die laatste is feitelijk een combinatie van de eerste twee. De linker en rechter lijnstukken van stap 1 en de middelste drie lijnstukken van stap 2 van de Eend-kromme zijn terug te zien in stap 1 van de Vogelnestjes fractal.



Wat er eigenlijk gebeurt, is dat het langste lijnstuk in stap 1 van de Eend-kromme vervangen wordt door diezelfde stap 1. Dat betekent dat de Vogelnestjes fractal niets anders is dan een variant van de Eend-kromme. En daarom lijken de contouren van beide fractals bij verdere stappen steeds meer op elkaar.



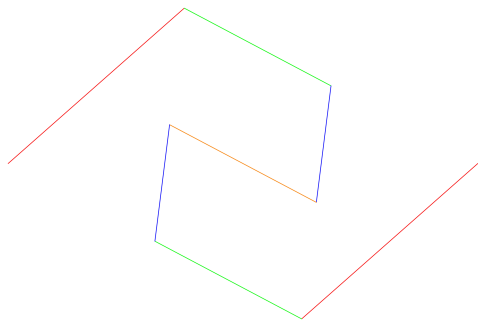
Varianten van de Eend-kromme

Hiervoor is getoond, dat een variant van de Eend-kromme is te maken door in stap 1 een lijnstuk te vervangen door een stap 1 van de Eend-kromme. De resulterende fractal is weer vlakvullend en de uiteindelijke contouren en oppervlakte van de nieuwe fractal zijn gelijk aan die van de Eend-kromme. Dit idee is verder door te voeren.

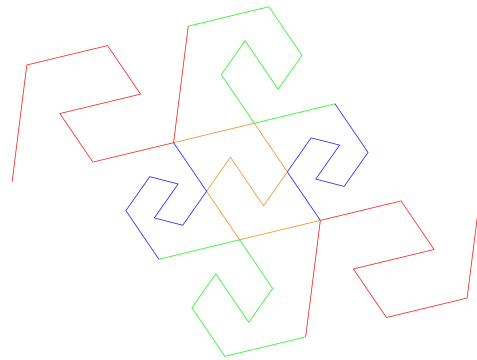
Spiralen

Door het middelste lijnstuk in stap 1 bij herhaling te vervangen door stap 1 van de Eend-kromme komen steeds verdergaande spiraalvormen tevoorschijn. Hier volgen drie voorbeelden.

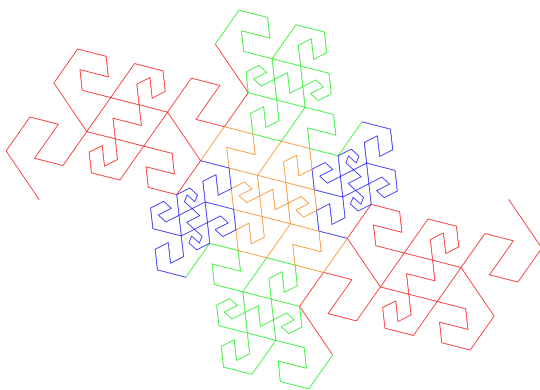
Met zeven lijnstukken:



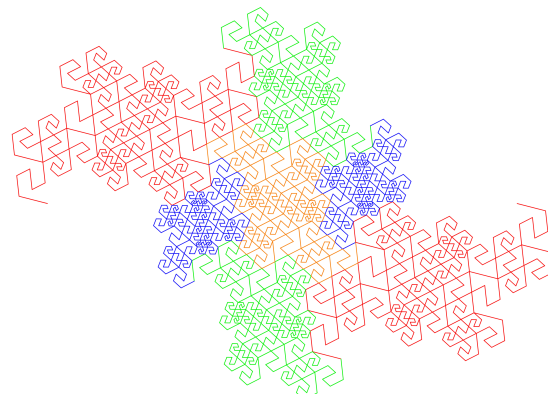
stap 1



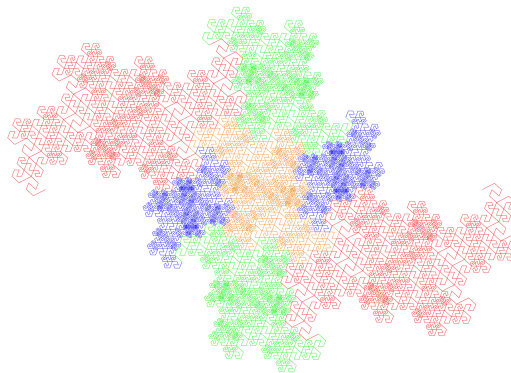
stap 2



stap 3

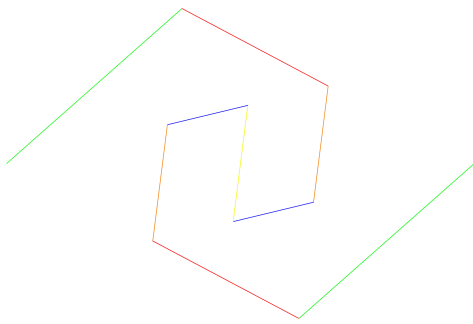


stap 4

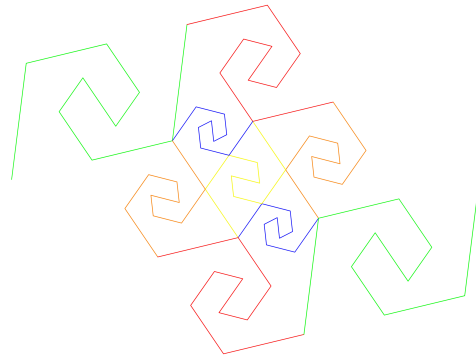


stap 5

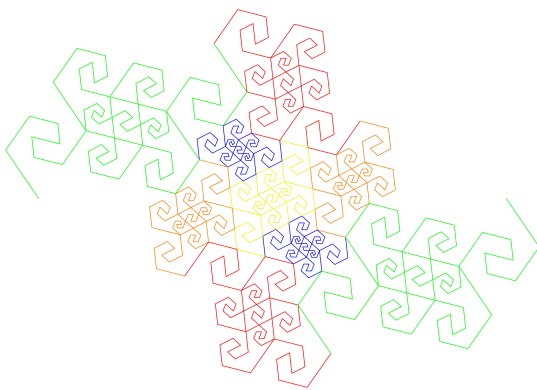
Met negen lijnstukken:



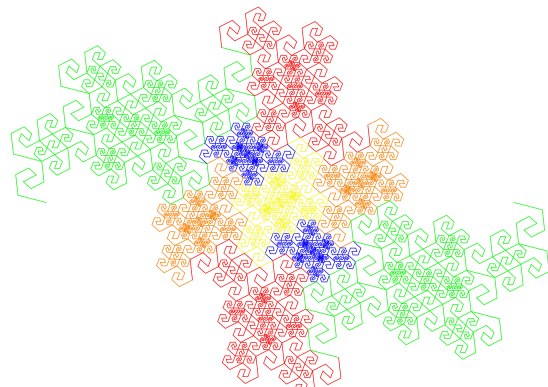
stap 1



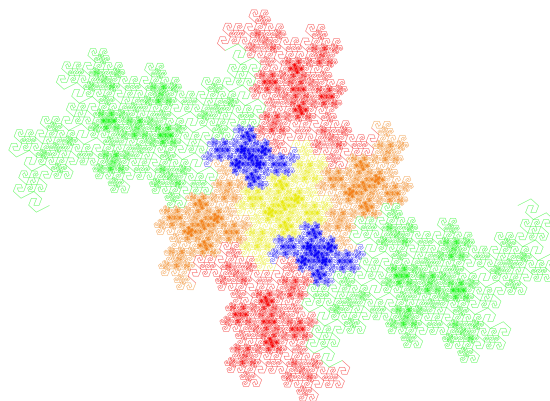
stap 2



stap 3

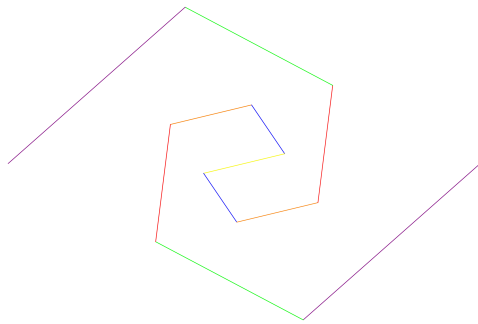


stap 4

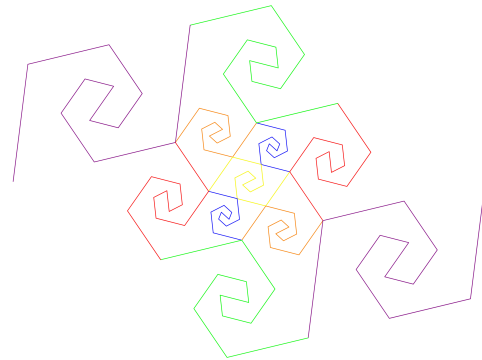


stap 5

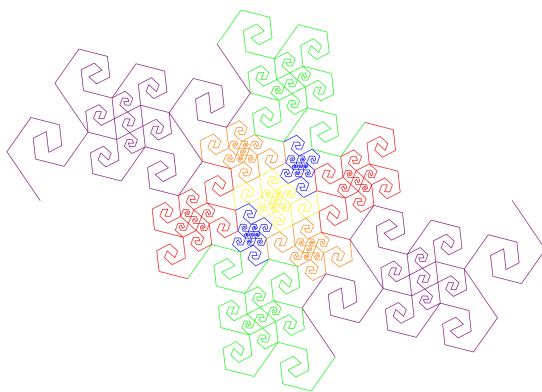
Met elf lijnstukken:



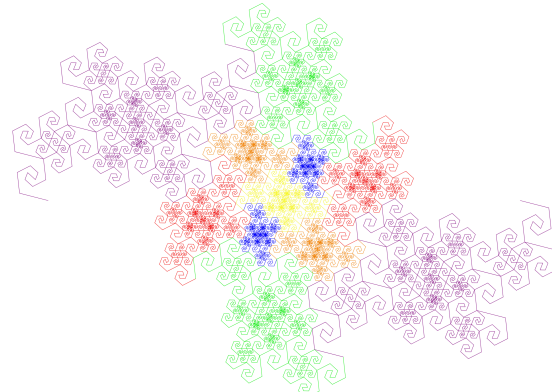
stap 1



stap 2



stap 3



stap 4

Dit kan in principe zo oneindig doorgevoerd worden.

Andere voorbeelden

Kunnen ook andere lijnstukken dan de middelste worden vervangen door een stap 1 van de Eend-kromme? Het antwoord is: ja, mits

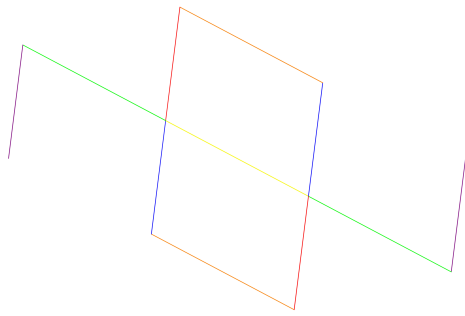
- alleen een lokaal langste lijnstuk vervangen wordt, en
- de vervanging –buiten het middelste lijnstuk– altijd in tweevoud plaatsvindt, namelijk punt symmetrisch ten opzichte van het midden van de fractal.

Deze twee voorwaarden maken dat alle naast elkaar gelegen lijnstukken in stap 1 een factor $\sqrt{2}$ van elkaar verschillen.

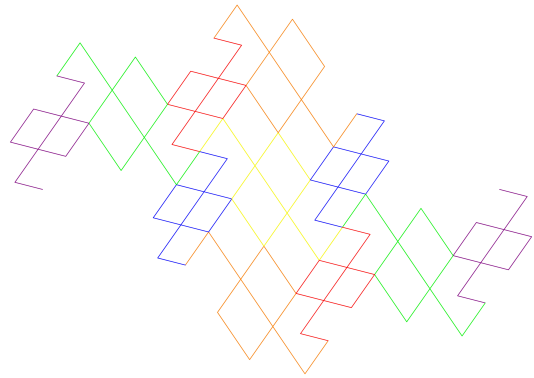
Hieronder volgen twee voorbeelden.

Met elf lijnstukken:

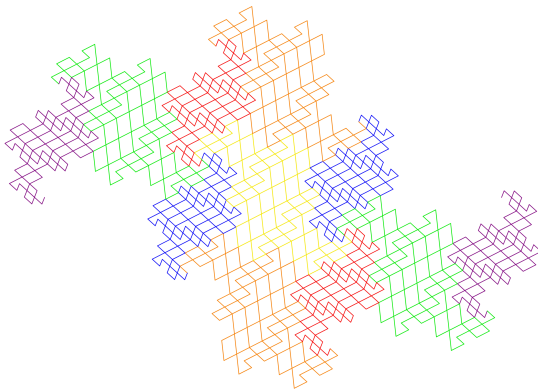
Hierbij zijn van de Vogelnestjes fractal de drie langste lijnstukken in stap 1 vervangen.



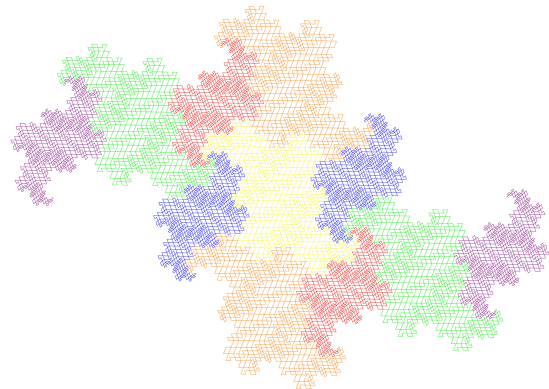
stap 1



stap 2



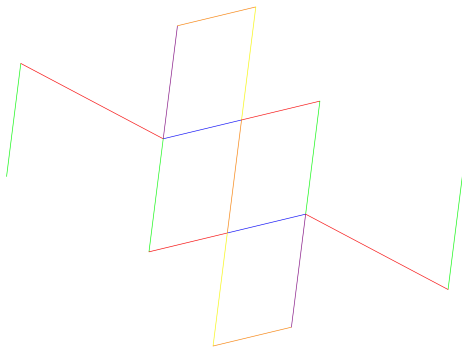
stap 3



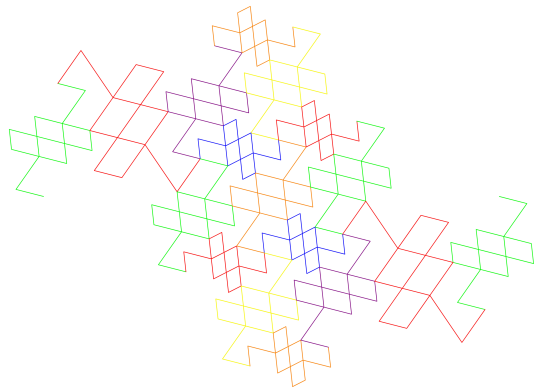
stap 4

Met zeventien lijnstukken:

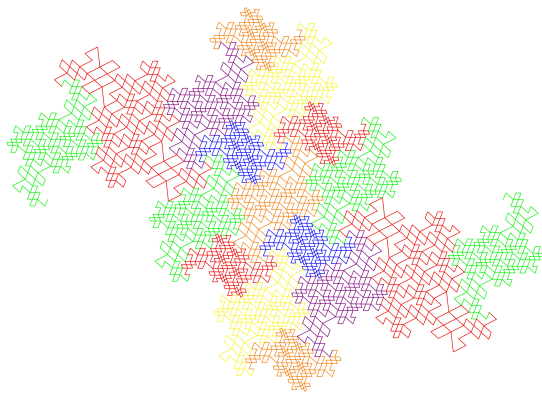
Hierbij zijn van de bovenstaande fractal de oranje en gele lijnstukken in stap 1 vervangen.



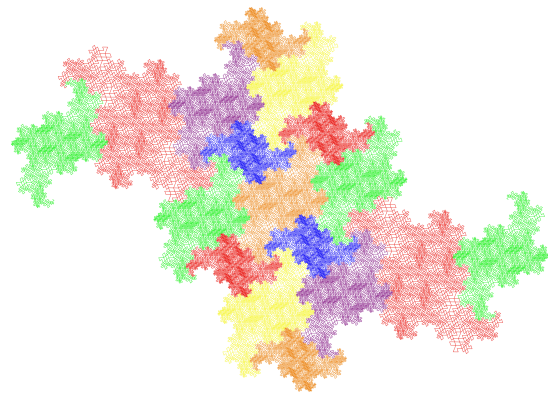
stap 1



stap 2



stap 3



stap 4

Er zijn uiteraard oneindig veel varianten op deze manier te bedenken.

Bij alle bovenstaande varianten vallen een aantal dingen op:

- Over alle varianten en over alle stappen daarvan geldt dat lijnstukken met gelijke lengte ook evenwijdig aan elkaar zijn.
- Naast de Eend-figuur, de vogel en zijn nest (parallellogram) ontstaan steeds meer verschillende ingesloten vormen.
- De uiteindelijke contouren van alle varianten zijn gelijk aan die van de Eend-kromme.
- De lengtes van de lijnstukken in stap 1 verschillen een of meer factoren $\sqrt{2}$ van elkaar. De overeenkomstige gekleurde deeloppervlaktes in de uiteindelijke fractal verschillen hetzelfde aantal factoren 2 van elkaar.

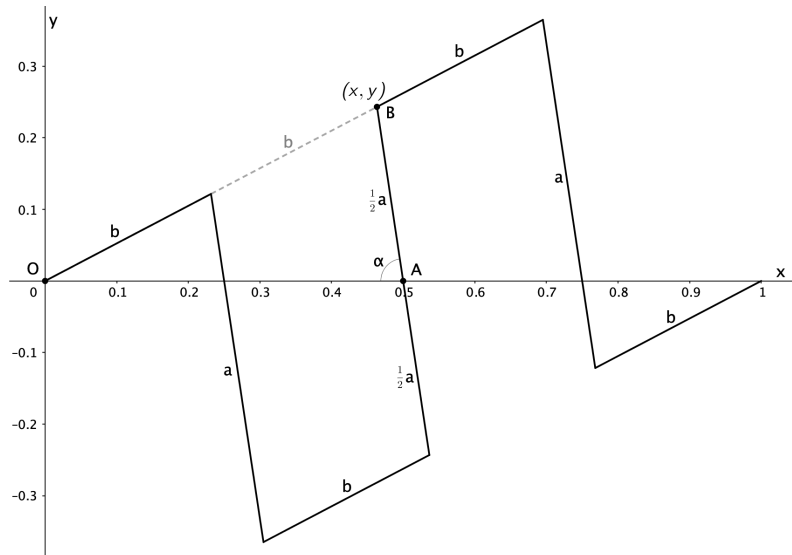
Titanic

Naast de Eend-kromme en zijn vele varianten is er nog een serie fractals te vinden, die alle niet aan een driehoekig of vierkantig rooster gebonden zijn.

Titanic2

Na de Eend-kromme met in stap 1 drie lijnstukken en de Vogelnestjes fractal met vijf lijnstukken, gaan we nu kijken naar een fractal met zeven lijnstukken.

Vanwege symmetrie en eenvoud van berekeningen kiezen we voor de opzet van hiernaast, met twee verschillende lengtes a en b voor de opeenvolgende lijnstukken.



Om de dimensie 2 te laten zijn, geldt: $3a^2 + 4b^2 = 1$.

We kiezen weer voor de verhouding k tussen a en b : $a = kb$.

Hiermee drukken we a en b uit in k :

$$3(kb)^2 + 4b^2 = 1 \rightarrow 3k^2b^2 + 4b^2 = 1 \rightarrow b^2(3k^2 + 4) = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{3k^2 + 4} \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3k^2 + 4}}$$

$$a = kb = \frac{k}{\sqrt{3k^2 + 4}}$$

De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft:

$$(2b)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{4}{3k^2 + 4} = \frac{1}{4} + \frac{k^2}{4(3k^2 + 4)} - \frac{k}{2\sqrt{3k^2 + 4}} \cos \alpha$$

$$\frac{k}{2\sqrt{3k^2 + 4}} \cos \alpha = \frac{1}{4} + \frac{k^2}{4(3k^2 + 4)} - \frac{4}{3k^2 + 4}$$

$$\cos \alpha = \left[\frac{3k^2 + 4}{4(3k^2 + 4)} + \frac{k^2}{4(3k^2 + 4)} - \frac{16}{4(3k^2 + 4)} \right] \frac{2\sqrt{3k^2 + 4}}{k}$$

$$= \frac{4k^2 - 12}{4(3k^2 + 4)} \cdot \frac{2\sqrt{3k^2 + 4}}{k} = \frac{2k^2 - 6}{k\sqrt{3k^2 + 4}}$$

$$\begin{aligned}
\sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2k^2 - 6}{k\sqrt{3k^2 + 4}} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(2k^2 - 6)^2}{k^2(3k^2 + 4)}} \\
&= \sqrt{\frac{k^2(3k^2 + 4) - 4k^4 - 24k^2 + 36}{k^2(3k^2 + 4)}} = \sqrt{\frac{3k^4 + 4k^2 - 4k^4 + 24k^2 - 36}{k^2(3k^2 + 4)}} \\
&= \frac{\sqrt{-k^4 + 28k^2 - 36}}{k\sqrt{3k^2 + 4}} \\
x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} - \frac{k}{2\sqrt{3k^2 + 4}} \cdot \frac{2k^2 - 6}{k\sqrt{3k^2 + 4}} = \frac{1}{2} - \frac{2k^2 - 6}{2(3k^2 + 4)} \\
&= \frac{3k^2 + 4}{2(3k^2 + 4)} - \frac{2k^2 - 6}{2(3k^2 + 4)} = \frac{k^2 + 10}{2(3k^2 + 4)} \\
y &= \frac{1}{2}a \cdot \sin \alpha = \frac{k}{2\sqrt{3k^2 + 4}} \cdot \frac{\sqrt{-k^4 + 28k^2 - 36}}{k\sqrt{3k^2 + 4}} = \frac{\sqrt{-k^4 + 28k^2 - 36}}{2(3k^2 + 4)}
\end{aligned}$$

k = 2

Voor $k = 2$ krijgen we:

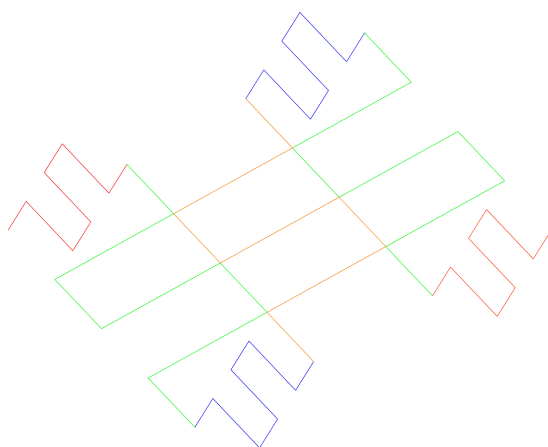
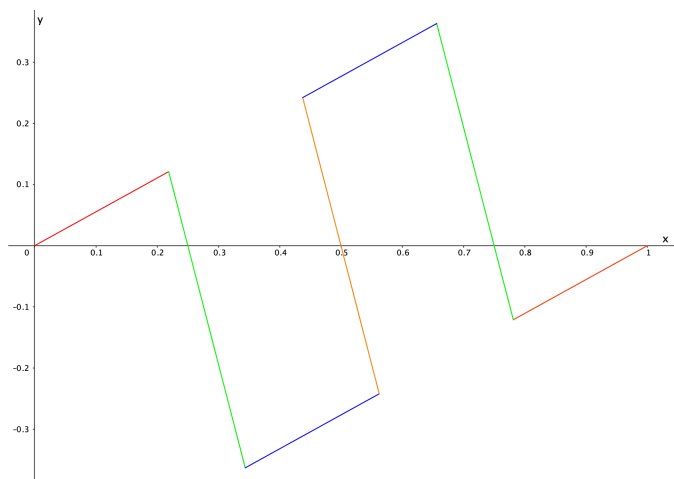
$$a = \frac{2}{\sqrt{3 \cdot 2^2 + 4}} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2^2 + 4}} = \frac{1}{4}$$

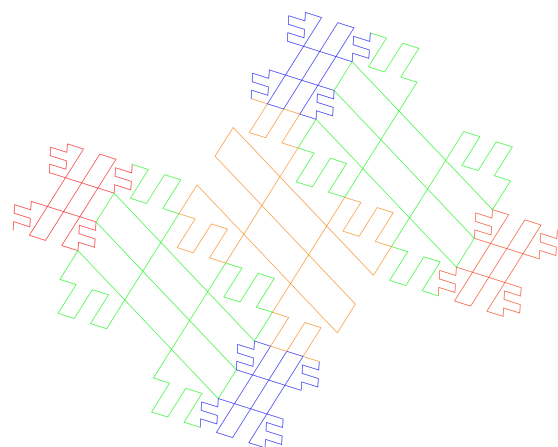
De coördinaten van de hoekpunten

zijn resp.: $(0, 0)$, $\left(\frac{7}{32}, \frac{1}{32}\sqrt{15}\right)$,
 $\left(\frac{11}{32}, -\frac{3}{32}\sqrt{15}\right)$, $\left(\frac{9}{16}, -\frac{1}{16}\sqrt{15}\right)$,
 $\left(\frac{7}{16}, \frac{1}{16}\sqrt{15}\right)$, $\left(\frac{21}{32}, \frac{3}{32}\sqrt{15}\right)$,
 $\left(\frac{25}{32}, -\frac{1}{32}\sqrt{15}\right)$ en $(1, 0)$.

Stap 1 ziet er als hiernaast uit.



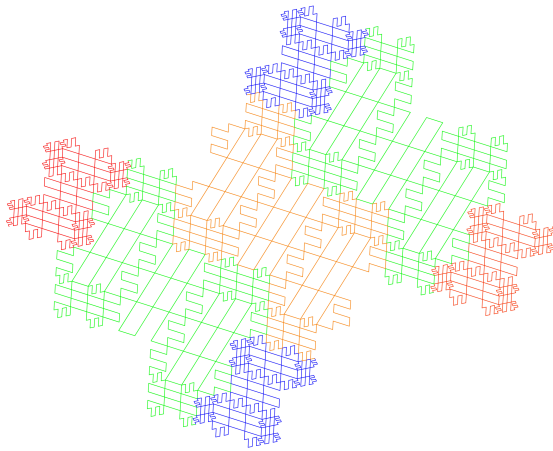
stap 2



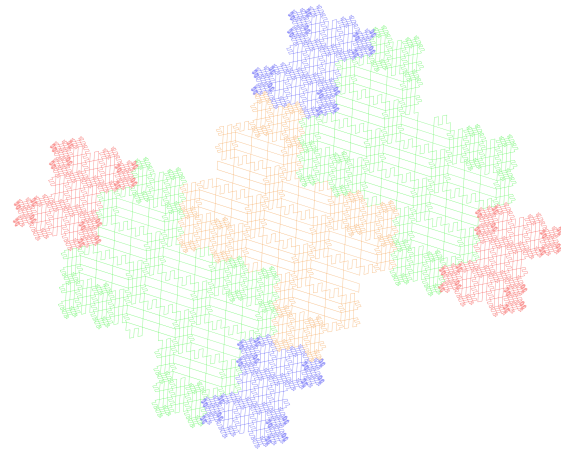
stap 3

Bij stap 2 zien we dat de fractal zichzelf raakt. In de ingesloten vorm bovenaan kun je met enige fantasie een zinkende Titanic zien, waarvan nog twee schoorstenen zichtbaar zijn. Dat is de reden dat ik deze fractal **Titanic2** noem.

De dimensie van deze fractal is 2 en er zijn geen snijdende of overlappende lijnstukken. De fractal is dus vlakvullend.



stap 4



stap 5

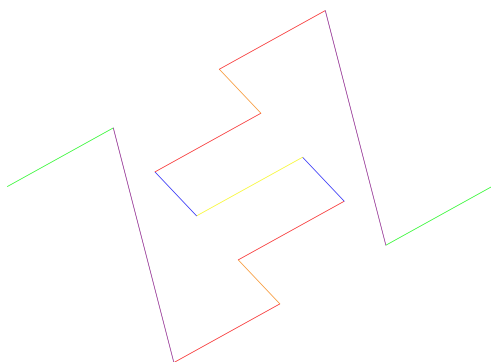
Deze fractal is wezenlijk anders dan de Eend-kromme: de contouren zien er anders uit en dit keer is de verhouding tussen lengtes van de lijnstukken niet $\sqrt{2}$, maar 2.

De vormen van de ingesloten figuren worden steeds meer divers en vanaf stap 4 ontstaan ingesloten figuren die niet meer een oppervlakteverhouding 1:4 hebben ten opzichte van de meeste andere ingesloten figuren. Dit maakt het berekenen van de uiteindelijke ingesloten oppervlakte met behulp van tellingen onmogelijk, omdat niet valt te voorspellen welke andere vormen de ingesloten figuren gaan aannemen bij verder stappen. Hier komen we later op terug.

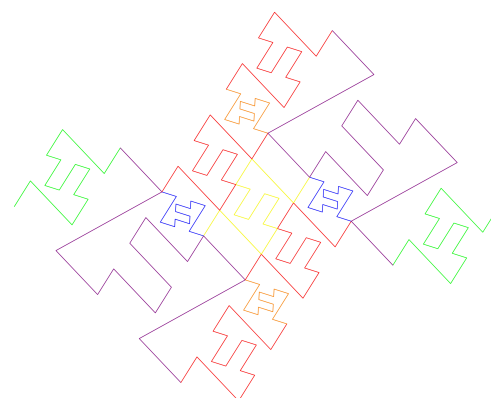
Titanic2 variant

Net als bij de Eend-kromme kunnen we kijken of we een variant van de Titanic2 fractal kunnen maken, die ook weer vlakvullend is. We vervangen het middelste lijnstuk van stap 1 door diezelfde stap 1.

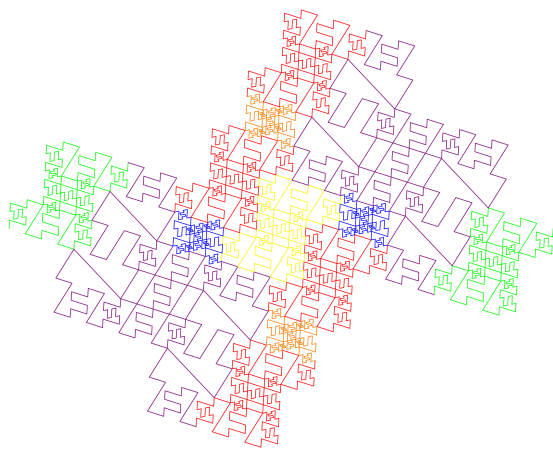
In stap 4 is te zien dat de contouren van deze fractal gelijk worden aan de contouren van de Titanic2 fractal. De uiteindelijke ingesloten oppervlaktes zullen gelijk aan elkaar zijn.



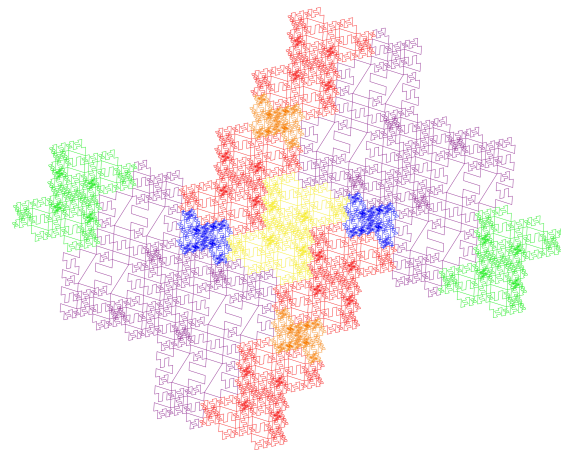
stap 1



stap 2



stap 3



stap 4

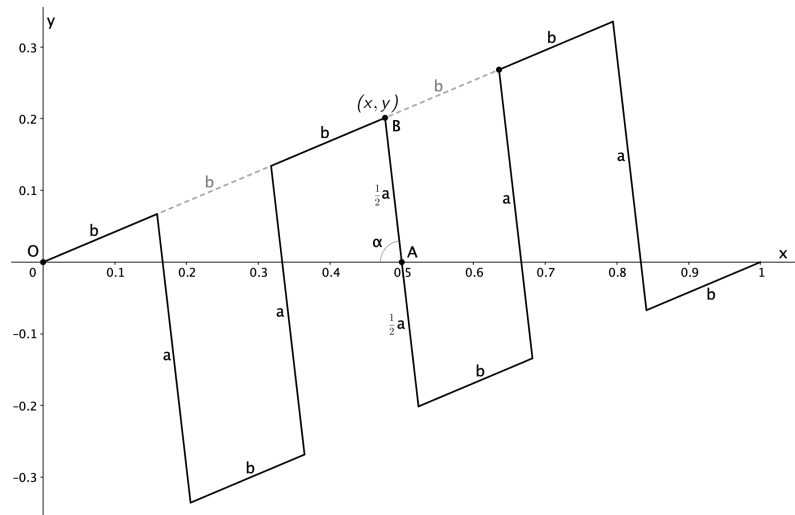
Er zijn vast nog veel meer varianten van de Titanic2 fractal te vinden, op dezelfde manier als bij de Eend-kromme gedaan is. Het aantal lijnstukken in stap 1 van de varianten gaat snel omhoog, omdat elke vervanging van een lijnstuk zes extra lijnstukken geeft.

Ik beperk me hier tot dit ene voorbeeld.

Titanic3

We gaan nu kijken naar een fractal met elf lijnstukken.

Vanwege symmetrie en eenvoud van berekeningen kiezen we voor de opzet van hiernaast, met twee verschillende lengtes a en b voor de opeenvolgende lijnstukken.



Om de dimensie 2 te laten zijn, geldt: $5a^2 + 6b^2 = 1$.

We kiezen weer voor de verhouding k tussen a en b :

$$a = kb.$$

Hiermee drukken we a en b uit in k :

$$5(kb)^2 + 6b^2 = 1 \rightarrow 5k^2b^2 + 6b^2 = 1 \rightarrow b^2(5k^2 + 6) = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{5k^2 + 6} \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{5k^2 + 6}}$$

$$a = kb = \frac{k}{\sqrt{5k^2 + 6}}$$

De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft:

$$(3b)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{9}{5k^2+6} = \frac{1}{4} + \frac{k^2}{4(5k^2+6)} - \frac{k}{2\sqrt{5k^2+6}}\cos\alpha$$

$$\frac{k}{2\sqrt{5k^2+6}}\cos\alpha = \frac{1}{4} + \frac{k^2}{4(5k^2+6)} - \frac{9}{5k^2+6}$$

$$\cos\alpha = \left[\frac{5k^2+6}{4(5k^2+6)} + \frac{k^2}{4(5k^2+6)} - \frac{36}{4(5k^2+6)} \right] \frac{2\sqrt{5k^2+6}}{k}$$

$$= \frac{6k^2-30}{4(5k^2+6)} \cdot \frac{2\sqrt{5k^2+6}}{k} = \frac{3k^2-15}{k\sqrt{5k^2+6}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3k^2-15}{k\sqrt{5k^2+6}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{(3k^2-15)^2}{k^2(5k^2+6)}}$$

$$= \sqrt{\frac{k^2(5k^2+6) - 9k^4 - 90k^2 + 225}{k^2(5k^2+6)}} = \sqrt{\frac{5k^4 + 6k^2 - 9k^4 + 90k^2 - 225}{k^2(5k^2+6)}}$$

$$= \frac{\sqrt{-4k^4 + 96k^2 - 225}}{k\sqrt{5k^2+6}}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} - \frac{k}{2\sqrt{5k^2+6}} \cdot \frac{3k^2-15}{k\sqrt{5k^2+6}} = \frac{1}{2} - \frac{3k^2-15}{2(5k^2+6)}$$

$$= \frac{5k^2+6}{2(5k^2+6)} - \frac{3k^2-15}{2(5k^2+6)} = \frac{2k^2+21}{2(5k^2+6)}$$

$$y = \frac{1}{2}a \cdot \sin\alpha = \frac{k}{2\sqrt{5k^2+6}} \cdot \frac{\sqrt{-4k^4+96k^2-225}}{k\sqrt{5k^2+6}} = \frac{\sqrt{-4k^4+96k^2-225}}{2(5k^2+6)}$$

$$k = \sqrt{6}$$

Voor $k = \sqrt{6}$ krijgen we:

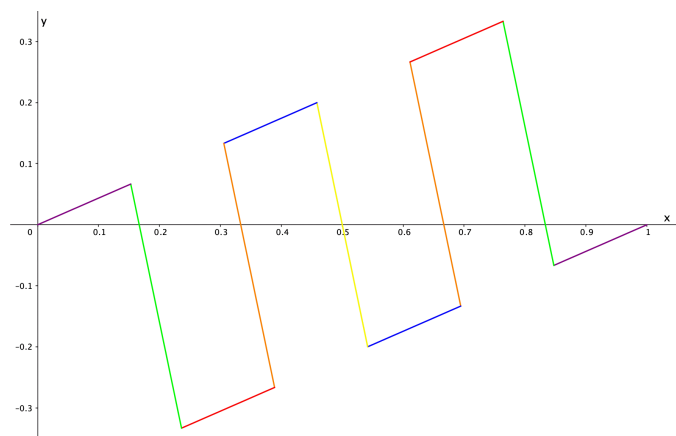
$$a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5 \cdot (\sqrt{6})^2 + 6}} = \frac{1}{6}\sqrt{6}$$

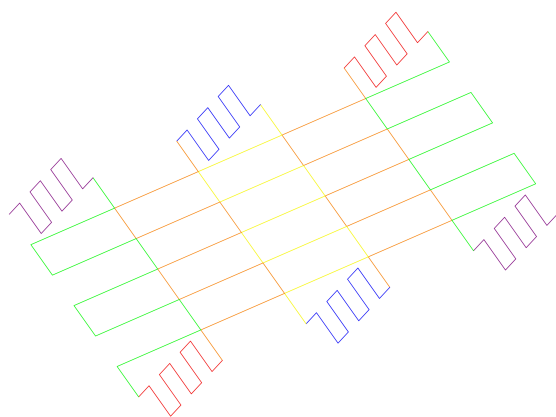
$$b = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot (\sqrt{6})^2 + 6}} = \frac{1}{6}$$

De coördinaten van de hoekpunten

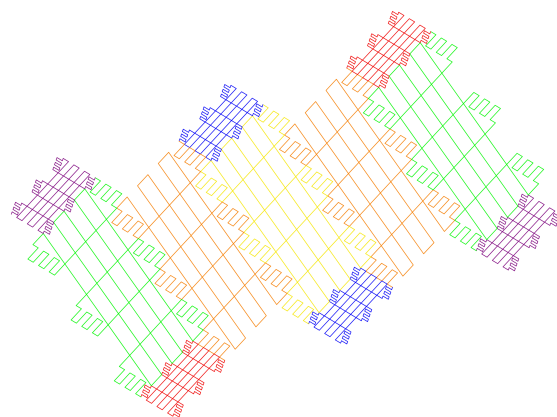
zijn resp.: $(0, 0)$, $\left(\frac{11}{72}, \frac{1}{72}\sqrt{23}\right)$,
 $\left(\frac{17}{72}, -\frac{5}{72}\sqrt{23}\right)$, $\left(\frac{7}{18}, -\frac{1}{18}\sqrt{23}\right)$,
 $\left(\frac{11}{36}, \frac{1}{36}\sqrt{23}\right)$, $\left(\frac{11}{24}, \frac{1}{24}\sqrt{23}\right)$,
 $\left(\frac{13}{24}, -\frac{1}{24}\sqrt{23}\right)$, $\left(\frac{25}{36}, -\frac{1}{36}\sqrt{23}\right)$,
 $\left(\frac{11}{18}, \frac{1}{18}\sqrt{23}\right)$, $\left(\frac{55}{72}, \frac{5}{72}\sqrt{23}\right)$, $\left(\frac{61}{72}, -\frac{1}{72}\sqrt{23}\right)$ en $(1, 0)$.

Stap 1 ziet er als hiernaast uit.





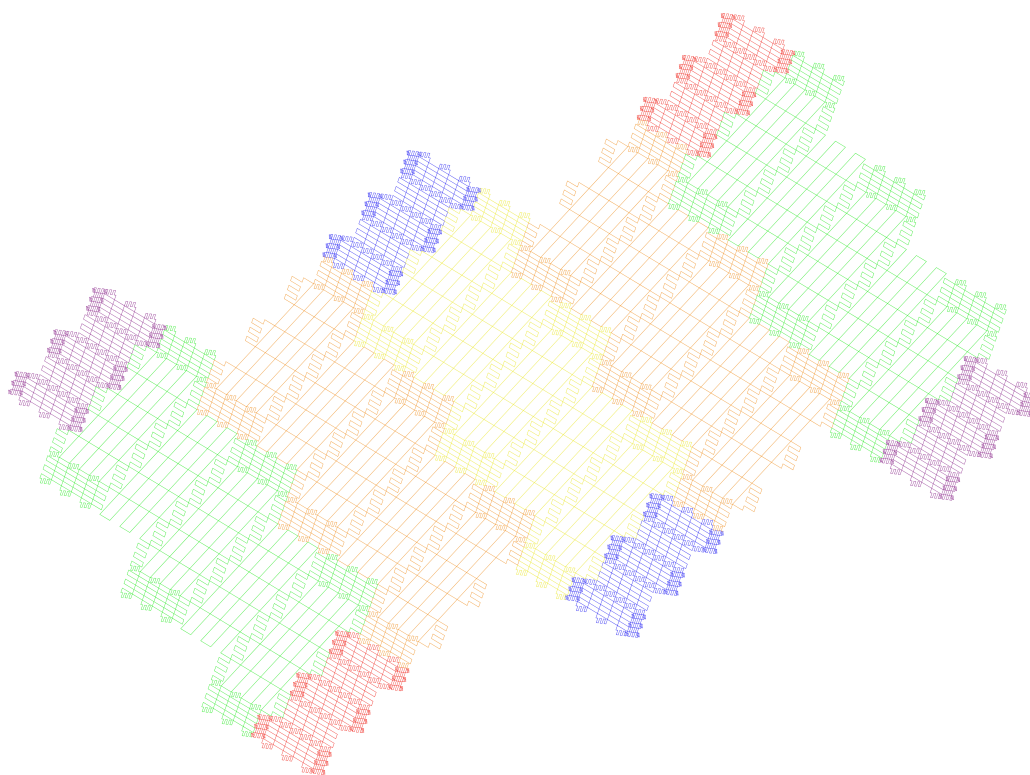
stap 2



stap 3

Bij stap 2 zien we dat de fractal zichzelf raakt. In de ingesloten vorm bovenaan kun je met enige fantasie een zinkende Titanic zien, waarvan nog drie schoorstenen zichtbaar zijn. Dat is de reden dat ik deze fractal **Titanic3** noem.

De dimensie van deze fractal is 2 en er zijn geen snijdende of overlappende lijnstukken. De fractal is dus vlakvullend.



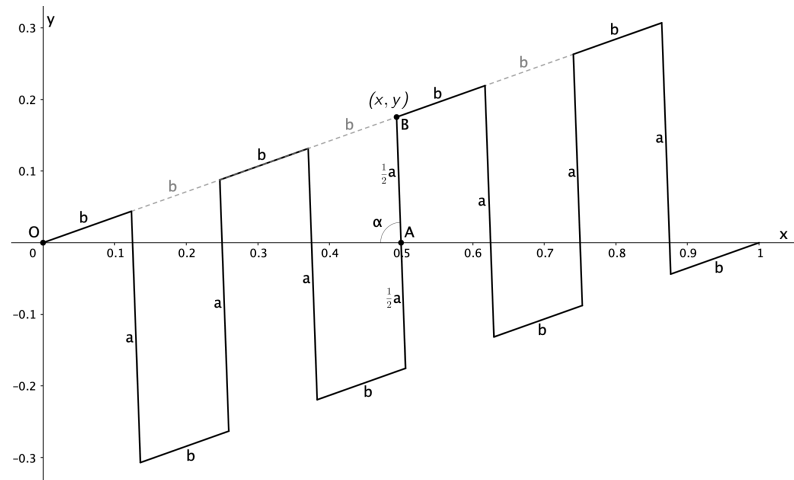
stap 4

Deze fractal is wezenlijk anders dan de Eend-kromme en de Titanic2 fractal: de contouren zien er anders uit en dit keer is de verhouding tussen lengtes van de lijnstukken $\sqrt{6}$.

Titanic4

We gaan nu kijken naar een fractal met vijftien lijnstukken.

Vanwege symmetrie en eenvoud van berekeningen kiezen we voor de opzet van hiernaast, met twee verschillende lengtes a en b voor de opeenvolgende lijnstukken.



Om de dimensie 2 te laten zijn, geldt: $7a^2 + 8b^2 = 1$.
We kiezen weer voor de verhouding k tussen a en b :

$$a = kb.$$

Hiermee drukken we a en b uit in k :

$$7(kb)^2 + 8b^2 = 1 \rightarrow 7k^2b^2 + 8b^2 = 1 \rightarrow b^2(7k^2 + 8) = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{7k^2 + 8} \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{7k^2 + 8}}$$

$$a = kb = \frac{k}{\sqrt{7k^2 + 8}}$$

De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft:

$$(4b)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{16}{7k^2 + 8} = \frac{1}{4} + \frac{k^2}{4(7k^2 + 8)} - \frac{k}{2\sqrt{7k^2 + 8}} \cos\alpha$$

$$\frac{k}{2\sqrt{7k^2 + 8}} \cos\alpha = \frac{1}{4} + \frac{k^2}{4(7k^2 + 8)} - \frac{16}{7k^2 + 8}$$

$$\cos\alpha = \left[\frac{7k^2 + 8}{4(7k^2 + 8)} + \frac{k^2}{4(7k^2 + 8)} - \frac{64}{4(7k^2 + 8)} \right] \frac{2\sqrt{7k^2 + 8}}{k}$$

$$= \frac{8k^2 - 56}{4(7k^2 + 8)} \cdot \frac{2\sqrt{7k^2 + 8}}{k} = \frac{4k^2 - 28}{k\sqrt{7k^2 + 8}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4k^2 - 28}{k\sqrt{7k^2 + 8}} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(4k^2 - 28)^2}{k^2(7k^2 + 8)}}$$

$$= \sqrt{\frac{k^2(7k^2 + 8) - 16k^4 - 224k^2 + 784}{k^2(7k^2 + 8)}} = \sqrt{\frac{7k^4 + 8k^2 - 16k^4 + 224k^2 - 784}{k^2(7k^2 + 8)}}$$

$$= \frac{\sqrt{-9k^4 + 232k^2 - 784}}{k\sqrt{7k^2 + 8}}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} - \frac{k}{2\sqrt{7k^2+8}} \cdot \frac{4k^2-28}{k\sqrt{7k^2+8}} = \frac{1}{2} - \frac{4k^2-28}{2(7k^2+8)}$$

$$= \frac{7k^2+8}{2(7k^2+8)} - \frac{4k^2-28}{2(7k^2+8)} = \frac{3k^2+36}{2(7k^2+8)}$$

$$y = \frac{1}{2}a \cdot \sin \alpha = \frac{k}{2\sqrt{7k^2+8}} \cdot \frac{\sqrt{-9k^4+232k^2-784}}{k\sqrt{7k^2+8}} = \frac{\sqrt{-9k^4+232k^2-784}}{2(7k^2+8)}$$

$$k = \sqrt{8}$$

Voor $k = \sqrt{8}$ krijgen we:

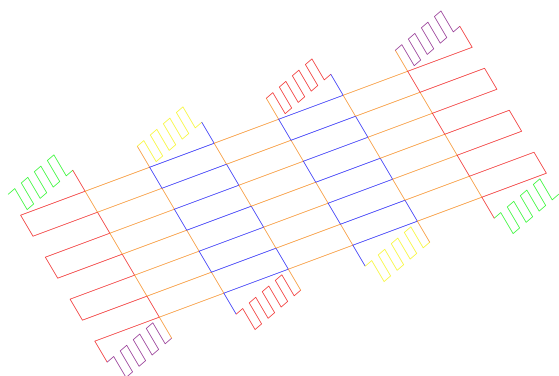
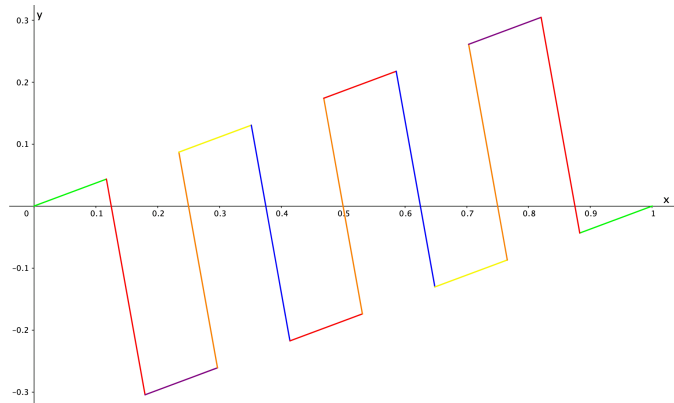
$$a = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7 \cdot (\sqrt{8})^2 + 8}} = \frac{1}{8}\sqrt{8}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{7 \cdot (\sqrt{8})^2 + 8}} = \frac{1}{8}$$

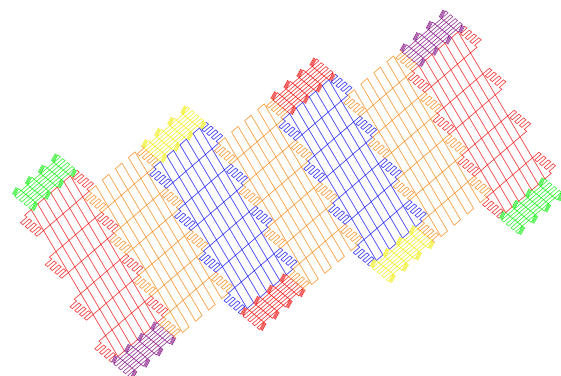
De coördinaten van de hoekpunten

zijn resp.: $(0, 0)$, $(\frac{15}{128}, \frac{1}{128}\sqrt{31})$,
 $(\frac{23}{128}, -\frac{7}{128}\sqrt{31})$, $(\frac{19}{64}, -\frac{3}{64}\sqrt{31})$,
 $(\frac{15}{64}, \frac{1}{64}\sqrt{31})$, $(\frac{45}{128}, \frac{3}{128}\sqrt{31})$,
 $(\frac{53}{128}, -\frac{5}{128}\sqrt{31})$, $(\frac{17}{32}, -\frac{1}{32}\sqrt{31})$, $(\frac{15}{32}, \frac{1}{32}\sqrt{31})$, $(\frac{75}{128}, \frac{5}{128}\sqrt{31})$, $(\frac{83}{128}, -\frac{3}{128}\sqrt{31})$,
 $(\frac{49}{64}, -\frac{1}{64}\sqrt{31})$, $(\frac{45}{64}, \frac{3}{64}\sqrt{31})$, $(\frac{105}{128}, \frac{7}{128}\sqrt{31})$, $(\frac{113}{128}, -\frac{1}{128}\sqrt{31})$ en $(1, 0)$.

Stap 1 ziet er als hiernaast uit.



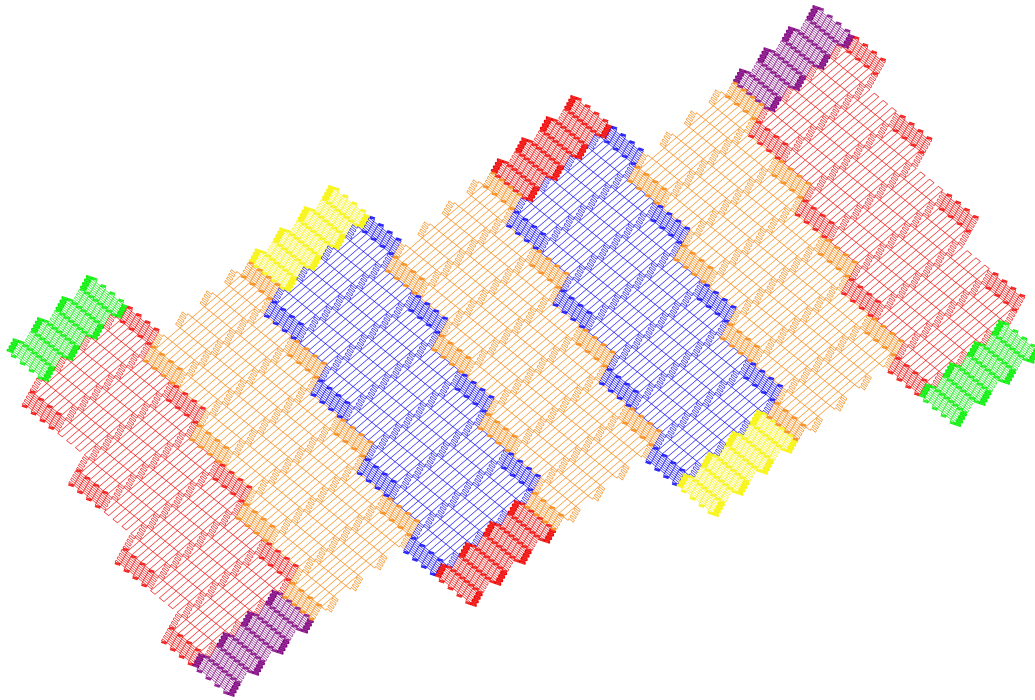
stap 2



stap 3

Bij stap 2 zien we dat de fractal zichzelf raakt. In de ingesloten vorm bovenaan kun je met enige fantasie een zinkende Titanic zien, waarvan vier schoorstenen zichtbaar zijn. Dat is de reden dat ik deze fractal **Titanic4** noem.

De dimensie van deze fractal is 2 en er zijn geen snijdende of overlappende lijnstukken. De fractal is dus vlakvullend.



stap 4

Deze fractal is wezenlijk anders dan de Eend-kromme en de andere Titanic fractals: de contouren zien er anders uit en dit keer is de verhouding tussen lengtes van de lijnstukken $\sqrt{8}$.

Op vergelijkbare manier zouden ook Titanic5, Titanic6, enz. fractals gemaakt kunnen worden. Afgezien van het feit dat de Titanic zelf niet meer dan vier schoorstenen had, worden de plaatjes van deze fractals steeds minder interessant (bakstenen muurtjes?). Ik laat het hier dus bij.

Ingesloten oppervlakte

Wel wil ik nog naar de ingesloten oppervlakte van de Titanic fractals kijken. Zoals al eerder opgemerkt, is het onmogelijk om te voorspellen welke nieuwe vormen de ingesloten figuren gaan aannemen bij verdere stappen. Dat maakt het onmogelijk met behulp van tellingen van ingesloten figuren de ingesloten oppervlakte te berekenen. Daarom doen we dat via een andere methode.

Van de Titanic2, Titanic3 en Titanic4 nemen we een stap 5 of 4 en trekken twee lijnen vanaf het hoogste punt van stap 1 naar $(0, 0)$ en naar $(1, 0)$. Samen met de x -as ontstaan zo driehoeken die grofweg overeenkomen met vorm van de fractal boven de x -as.

Aan de rechterzijde zien we 2, 3 en 4 stukjes van de fractal buiten de driehoek vallen, en ook 2, 3 en 4 witte stukjes binnen de driehoek. Wanneer we de stappen naar oneindig zouden laten gaan, worden de oppervlaktes van de gebiedjes binnen en buiten de driehoek precies even groot. Voor de oppervlakte bepaling kunnen we aan de rechterkant dus de rechte lijn van de driehoek gebruiken.

Iets vergelijkbaars zien we bij de linkerzijde van de driehoek. Daar blijft echter een gebiedje buiten de driehoek over. De oppervlakte van dat gebiedje moeten we dus bij de oppervlakte van de driehoek optellen.

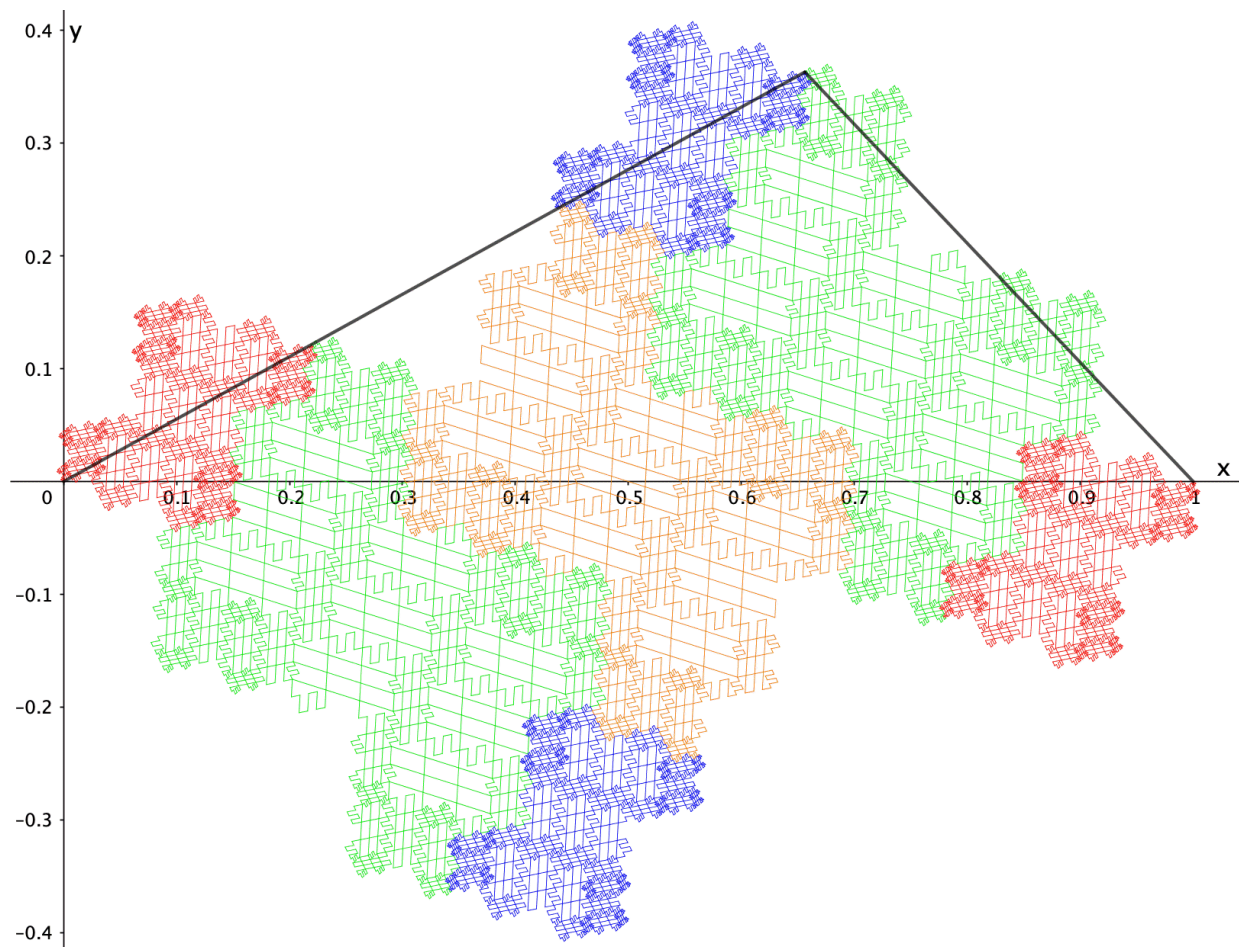
Nu zien we dat zo'n gebiedje buiten de driehoek precies de helft is van een verkleinde kopie van de gehele fractal. De oppervlakte daarvan kunnen we ook weer benaderen met een driehoek, maar dan missen we weer een klein stukje, enz. Dit idee gaan we eerst uitwerken voor de Titanic2.

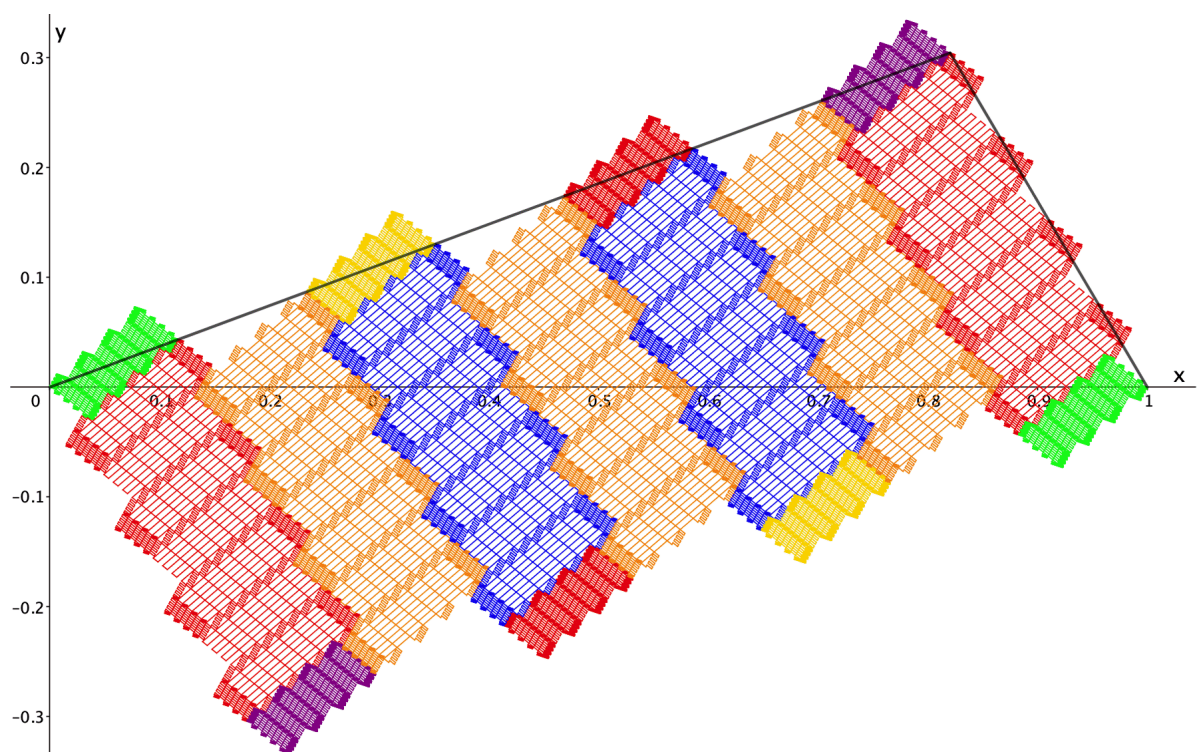
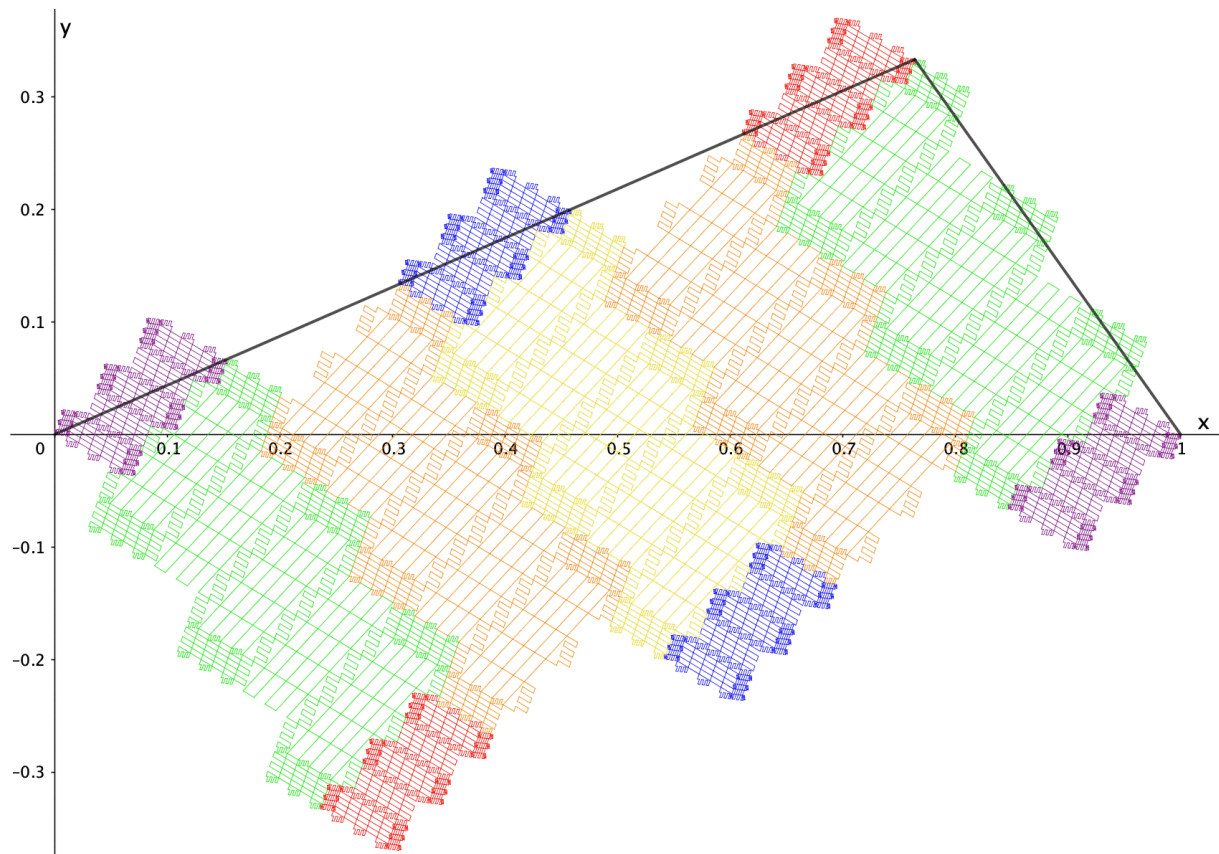
De basis van de grote driehoek is 1. De basis van de kleine driehoek is $\frac{1}{4}$. De oppervlakte van de kleine driehoek is dus een factor 16 kleiner. De nog kleinere driehoek daarbovenop is weer een factor 16 kleiner, enz. Dit geeft een meetkundige

reeks: $\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{16}\right)^k$. Als het aantal stappen n naar oneindig gaat wordt de som:

$\frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{\frac{15}{16}} = \frac{16}{15}$. Dat betekent dat de oppervlakte van de grote driehoek met een

factor $\frac{16}{15}$ wordt vermenigvuldigd om zo de uiteindelijke ingesloten oppervlakte van de fractal boven de x-as te krijgen. Vermenigvuldiging met 2 geeft de uiteindelijke ingesloten oppervlakte van de gehele fractal.





Titanic nummer

Nu meer algemeen: we introduceren de t als Titanic nummer. Bij Titanic2 geldt uiteraard $t = 2$, bij Titanic3 geldt $t = 3$, enz.

Het aantal lijnen in stap 1 van de fractal is dan $4t - 1$ en de verhouding tussen de lengtes van de lijnstukken is $\sqrt{2t}$.

De factor waarmee de oppervlakte van de driehoek moet worden vermenigvuldigd is: $\frac{(2t)^2}{(2t)^2 - 1}$.

De oppervlakte van de driehoek is: $\frac{1}{2}b \cdot h$. Hierbij is de basis 1 en voor de driehoek onder de x-as vermenigvuldigen we met 2. Dat betekent dat de oppervlakte van de twee driehoeken (parallellogram) gelijk is aan de hoogte van de driehoek en dus gelijk aan de y-coördinaat van het hoogste punt in stap 1.

- Bij Titanic2 was de berekende x-coördinaat van punt B: $\frac{1}{16}\sqrt{15}$. Voor het hoogste punt moet deze waarde nog met $\frac{3}{2}$ vermenigvuldigd worden.
- Bij Titanic3 was de berekende x-coördinaat van punt B: $\frac{1}{24}\sqrt{23}$. Voor het hoogste punt moet deze waarde nog met $\frac{5}{3}$ vermenigvuldigd worden.
- Bij Titanic4 was de berekende x-coördinaat van punt B: $\frac{1}{32}\sqrt{31}$. Voor het hoogste punt moet deze waarde nog met $\frac{7}{4}$ vermenigvuldigd worden.

Hieruit is de y-coördinaat voor alle Titanic fractals af te leiden: $\frac{1}{8t}\sqrt{8t-1} \cdot \frac{2t-1}{t}$. Dit is dan ook meteen de formule voor de oppervlakte van de twee driehoeken samen.

Alles bij elkaar wordt dan de formule voor de uiteindelijke ingesloten oppervlakte van elke Titanic fractal:

$$O_t = \frac{\sqrt{8t-1}}{8t} \cdot \frac{2t-1}{t} \cdot \frac{(2t)^2}{(2t)^2 - 1} = \frac{\sqrt{8t-1}}{8t} \cdot \frac{2t-1}{t} \cdot \frac{4t^2}{(2t+1)(2t-1)} = \frac{\sqrt{8t-1}}{2(2t+1)}$$

Voor de bovenstaande drie Titanic fractals levert dit de volgende waarden:

$$O_2 = \frac{1}{10}\sqrt{15} \approx 0,38730$$

$$O_3 = \frac{1}{14}\sqrt{23} \approx 0,34256$$

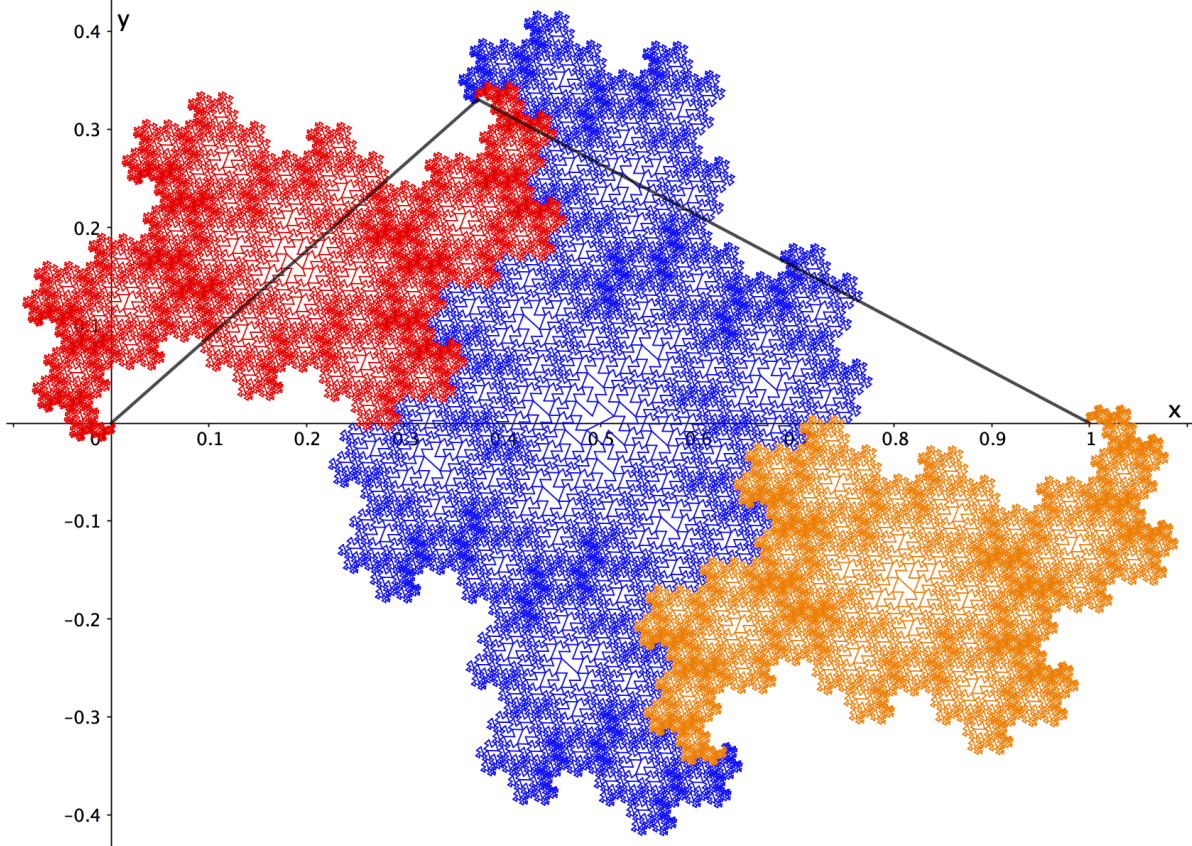
$$O_4 = \frac{1}{18}\sqrt{31} \approx 0,30932$$

Omdat de Eend-kromme op precies dezelfde manier is geconstrueerd, geldt voor de Eend-kromme: $t = 1$. De bovenstaande oppervlakte formule blijkt ook bruikbaar voor de Eend-kromme:

$$O_1 = \frac{1}{6}\sqrt{7} \approx 0,44096$$

Laten we voor de zekerheid toch nog even kijken naar de Eend-kromme met daarin ook de driehoek door het hoogste punt van stap 1 getekend. Aan de rechterzijde zien we dat de gebieden buiten de driehoek weer precies passen in de witte gebieden binnen de driehoek. Aan de linkerzijde steekt precies de helft is van een verkleinde kopie van de gehele fractal buiten de driehoek. Die kan op dezelfde wijze als bij de

hiervoor beschreven Titanic fractals opgeteld worden bij de oppervlakte van de driehoek.



Dit bevestigt dat de oppervlakte formule ook voor de Eend-kromme geldt.

Peaks

De Eend-kromme kan op nog een andere manier verlengd worden: in plaats van drie lijnstukken, nemen we vijf, zeven of negen lijnstukken, zoals hieronder getoond wordt. De lijnstukken a zijn parallel en even lang; de lijnstukken b zijn ook parallel en even lang.

Twin Peaks

We beginnen met vijf lijnstukken. Vanwege symmetrie zit het middelste lijnstuk a in het midden vast aan het punt $(\frac{1}{2}, 0)$.

Om de dimensie 2 te laten zijn, geldt: $3a^2 + 2b^2 = 1$. We kiezen weer voor de verhouding k tussen a en b : $a = kb$.

Hiermee drukken we a en b uit in k :

$$3(kb)^2 + 2b^2 = 1 \rightarrow 3k^2b^2 + 2b^2 = 1 \rightarrow b^2(3k^2 + 2) = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{3k^2 + 2} \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3k^2 + 2}}$$

$$a = kb = \frac{k}{\sqrt{3k^2 + 2}}$$

De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft:

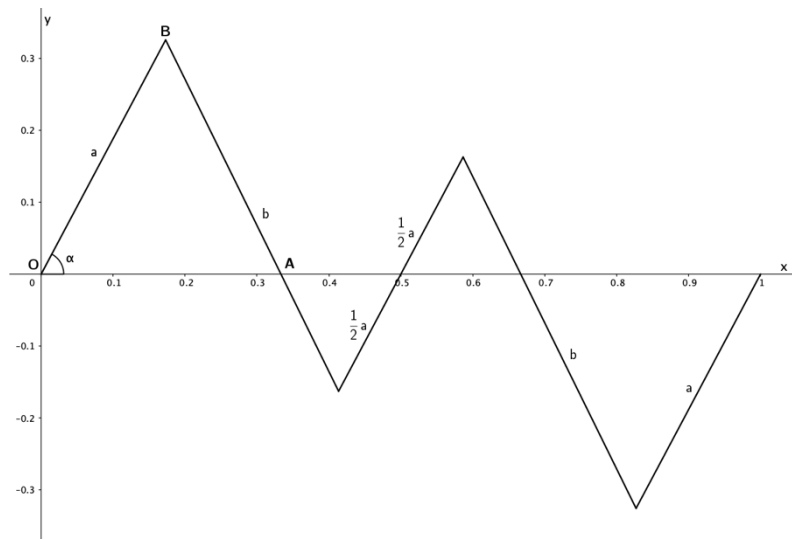
$$(\frac{2}{3}b)^2 = (\frac{1}{3})^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{4}{9(3k^2 + 2)} = \frac{1}{9} + \frac{k^2}{3k^2 + 2} - \frac{2k}{3\sqrt{3k^2 + 2}} \cos \alpha$$

$$\frac{2k}{3\sqrt{3k^2 + 2}} \cos \alpha = \frac{1}{9} + \frac{k^2}{3k^2 + 2} - \frac{4}{9(3k^2 + 2)}$$

$$\cos \alpha = \left[\frac{3k^2 + 2}{9(3k^2 + 2)} + \frac{9k^2}{9(3k^2 + 2)} - \frac{4}{9(3k^2 + 2)} \right] \frac{3\sqrt{3k^2 + 2}}{2k}$$

$$= \frac{12k^2 - 2}{9(3k^2 + 2)} \cdot \frac{3\sqrt{3k^2 + 2}}{2k} = \frac{6k^2 - 1}{3k\sqrt{3k^2 + 2}}$$



$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{6k^2 - 1}{3k\sqrt{3k^2 + 2}} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(6k^2 - 1)^2}{9k^2(3k^2 + 2)}} \\ &= \sqrt{\frac{9k^2(3k^2 + 2) - 36k^4 - 12k^2 + 1}{9k^2(3k^2 + 2)}} = \sqrt{\frac{27k^4 + 18k^2 - 36k^4 - 12k^2 - 1}{9k^2(3k^2 + 2)}} \\ &= \frac{\sqrt{-9k^4 + 30k^2 - 1}}{3k\sqrt{3k^2 + 2}}\end{aligned}$$

$$x_B = a \cdot \cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{3k^2 + 2}} \cdot \frac{6k^2 - 1}{3k\sqrt{3k^2 + 2}} = \frac{6k^2 - 1}{3(3k^2 + 2)}$$

$$y_B = a \cdot \sin \alpha = \frac{k}{\sqrt{3k^2 + 2}} \cdot \frac{\sqrt{-9k^4 + 30k^2 - 1}}{3k\sqrt{3k^2 + 2}} = \frac{\sqrt{-9k^4 + 30k^2 - 1}}{3(3k^2 + 2)}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Voor $k = \sqrt{\frac{1}{3}}$ krijgen we:

$$a = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2}} = \frac{1}{3}$$

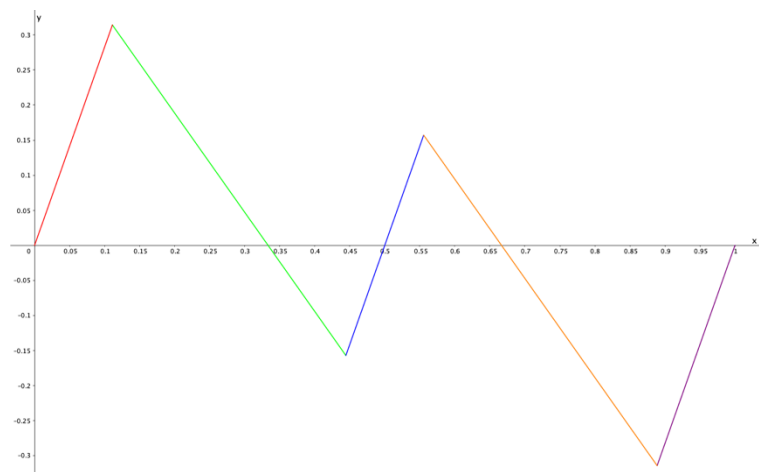
$$b = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

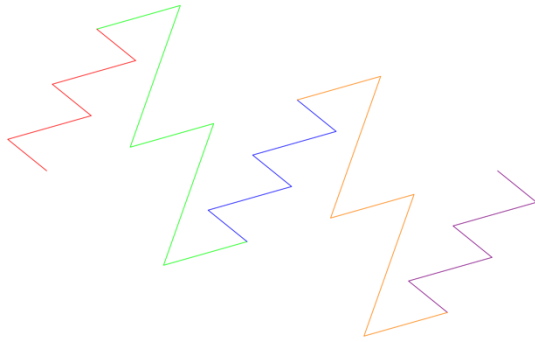
$$x_B = \frac{6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1}{3\left(3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\right)} = \frac{2 - 1}{3(1 + 2)} = \frac{1}{9}$$

$$y_B = \frac{\sqrt{-9\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + 30\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1}}{3\left(3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\right)} = \frac{\sqrt{-1 + 10 - 1}}{3(1 + 2)} = \frac{\sqrt{8}}{9} = \frac{2}{9}\sqrt{2}$$

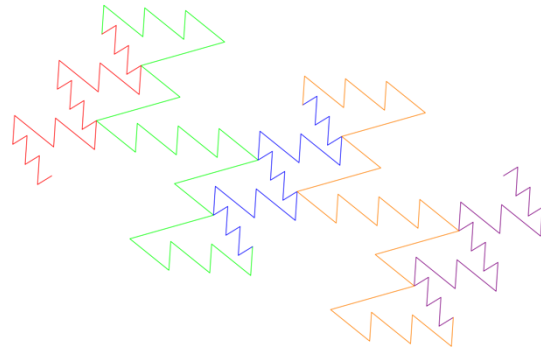
De coördinaten van de hoekpunten zijn resp.: $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{5}{9}, \frac{1}{9}\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{8}{9}, -\frac{2}{9}\sqrt{2}\right)$ en $(1, 0)$.

Stap 1 ziet er als hiernaast uit.





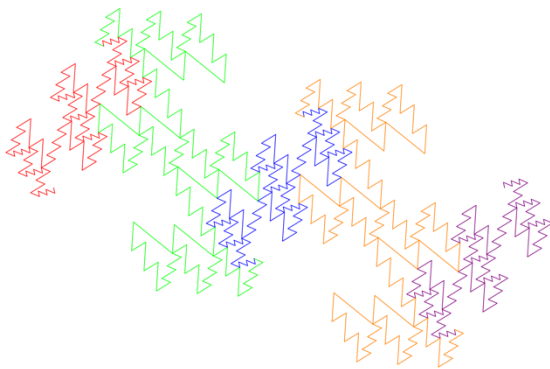
stap 2



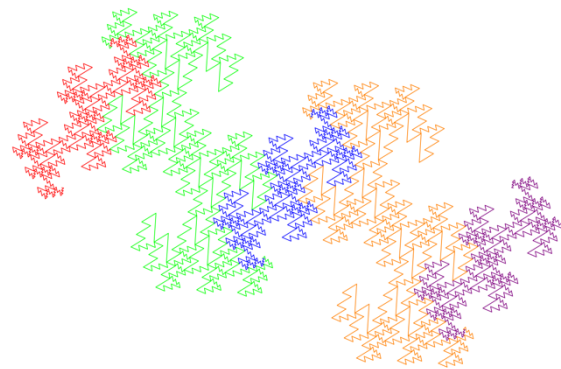
stap 3

Bij stap 3 zien we dat de fractal zichzelf raakt. In de ingesloten vorm bovenaan kun je met enige fantasie een berglandschap zien, met rechts twee bergtoppen en links een naaldboom. Dat is de reden dat ik deze fractal **Twin Peaks** noem (naar de gelijknamige tv-serie uit 1990).

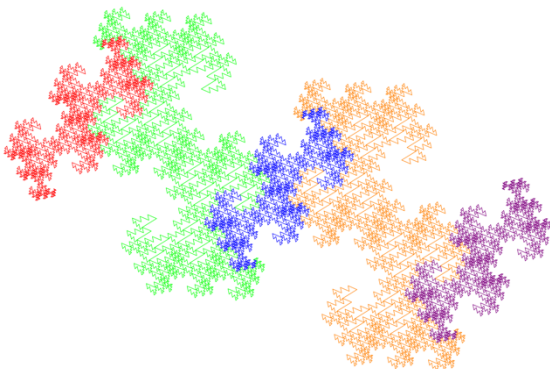
De dimensie van deze fractal is 2 en er zijn geen snijdende of overlappende lijnstukken. De fractal is dus vlakvullend.



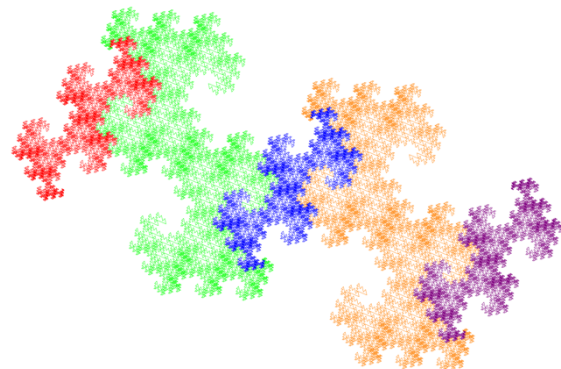
stap 4



stap 5



stap 6

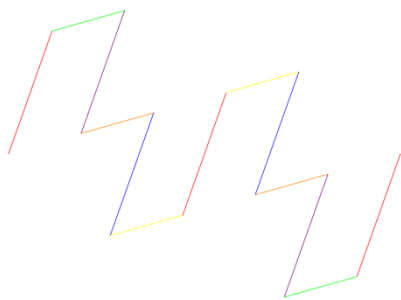


stap 7

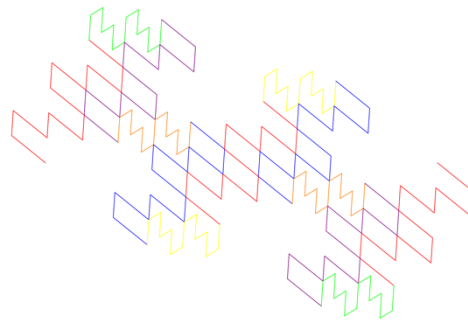
Twin Peaks variant

Net als bij de Eend-kromme kunnen we kijken of we een variant van de Twin Peaks fractal kunnen maken, die ook weer vlakvullend is. We vervangen de langste twee lijnstukken van stap 1 door diezelfde stap 1.

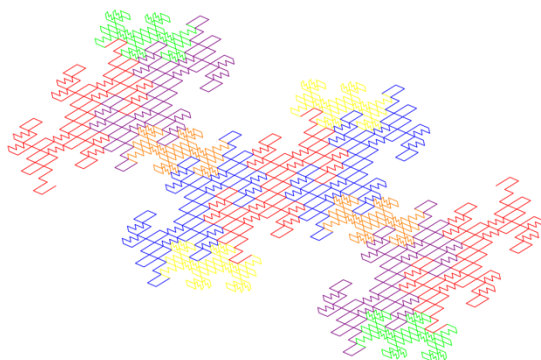
In stap 4 is te zien dat de contouren van deze fractal gelijk worden aan de contouren van de Twin Peaks fractal. De uiteindelijke ingesloten oppervlaktes zullen gelijk aan elkaar zijn.



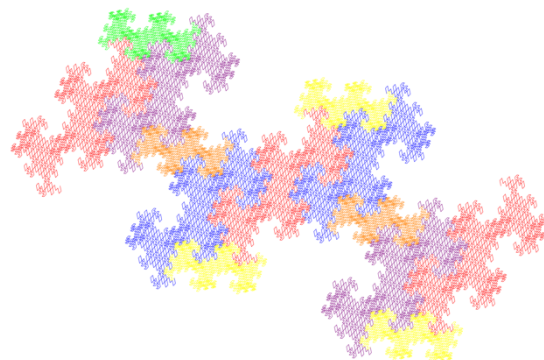
stap 1



stap 2



stap 3



stap 4

Er zijn vast nog veel meer varianten van de Twin Peaks fractal te vinden, op dezelfde manier als bij de Eend-kromme gedaan is. Het aantal lijnstukken in stap 1 van de varianten gaat snel omhoog, omdat elke vervanging van een lijnstuk vier extra lijnstukken geeft.

Ik beperk me hier tot dit ene voorbeeld.

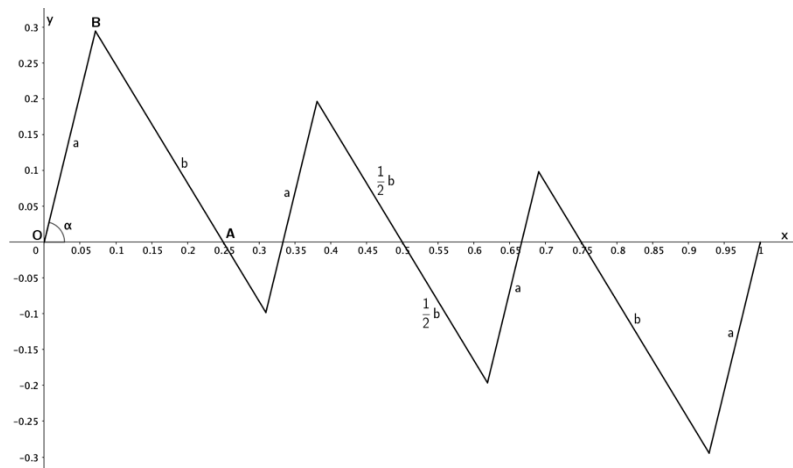
Triplet Peaks

We beginnen met zeven lijnstukken. Vanwege symmetrie zit het middelste lijnstuk b in het midden vast aan het punt $(\frac{1}{2}, 0)$.

Om de dimensie 2 te laten zijn, geldt: $4a^2 + 3b^2 = 1$.

We kiezen weer voor de verhouding k tussen a en b :
 $a = kb$.

Hiermee drukken we a en b uit in k :



$$4(kb)^2 + 3b^2 = 1 \rightarrow 4k^2b^2 + 3b^2 = 1 \rightarrow b^2(4k^2 + 3) = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{4k^2 + 3} \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{4k^2 + 3}}$$

$$a = kb = \frac{k}{\sqrt{4k^2 + 3}}$$

De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft:

$$\left(\frac{3}{4}b\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot a \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{9}{16(4k^2 + 3)} = \frac{1}{16} + \frac{k^2}{4k^2 + 3} - \frac{k}{2\sqrt{4k^2 + 3}} \cos \alpha$$

$$\frac{k}{2\sqrt{4k^2 + 3}} \cos \alpha = \frac{1}{16} + \frac{k^2}{4k^2 + 3} - \frac{9}{16(4k^2 + 3)}$$

$$\cos \alpha = \left[\frac{4k^2 + 3}{16(4k^2 + 3)} + \frac{16k^2}{16(4k^2 + 3)} - \frac{9}{16(4k^2 + 3)} \right] \frac{2\sqrt{4k^2 + 3}}{k}$$

$$= \frac{20k^2 - 6}{16(4k^2 + 3)} \cdot \frac{2\sqrt{4k^2 + 3}}{k} = \frac{10k^2 - 3}{4k\sqrt{4k^2 + 3}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{10k^2 - 3}{4k\sqrt{4k^2 + 3}} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(10k^2 - 3)^2}{16k^2(4k^2 + 3)}}$$

$$= \sqrt{\frac{64k^4 + 48k^2}{16k^2(4k^2 + 3)} - \frac{100k^4 - 60k^2 + 9}{16k^2(4k^2 + 3)}} = \frac{1}{4k} \sqrt{\frac{64k^4 + 48k^2 - 100k^4 + 60k^2 - 9}{4k^2 + 3}}$$

$$= \frac{\sqrt{-36k^4 + 108k^2 - 9}}{4k\sqrt{4k^2 + 3}}$$

$$x_B = a \cdot \cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{4k^2 + 3}} \cdot \frac{10k^2 - 3}{4k\sqrt{4k^2 + 3}} = \frac{10k^2 - 3}{4(4k^2 + 3)}$$

$$y_B = a \cdot \sin \alpha = \frac{k}{\sqrt{4k^2 + 3}} \cdot \frac{\sqrt{-36k^4 + 108k^2 - 9}}{4k\sqrt{4k^2 + 3}} = \frac{\sqrt{-36k^4 + 108k^2 - 9}}{4(4k^2 + 3)}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

Voor $k = \frac{1}{2}$ krijgen we:

$$a = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3}} = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3}} = \frac{1}{2}$$

$$x_B = \frac{10\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3}{4\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{16} = -\frac{1}{32}$$

$$y_B = \frac{\sqrt{-36\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 108\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 9}}{4\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\right)} = \frac{\sqrt{-\frac{9}{4} + 27 - 9}}{16} = \frac{\sqrt{\frac{63}{4}}}{16} = \frac{3}{32}\sqrt{7}$$

De coördinaten van de

hoekpunten zijn resp.: (0, 0),

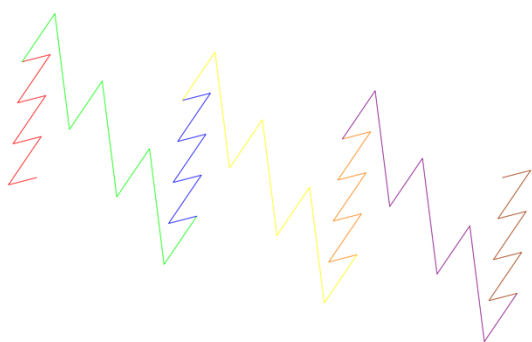
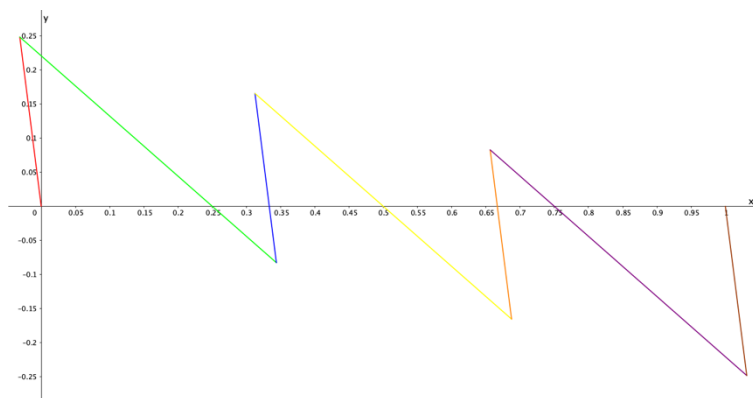
$\left(-\frac{1}{32}, \frac{3}{32}\sqrt{7}\right)$, $\left(\frac{11}{32}, -\frac{1}{32}\sqrt{7}\right)$

, $\left(\frac{10}{32}, \frac{2}{32}\sqrt{7}\right)$, $\left(\frac{22}{32}, -\frac{2}{32}\sqrt{7}\right)$

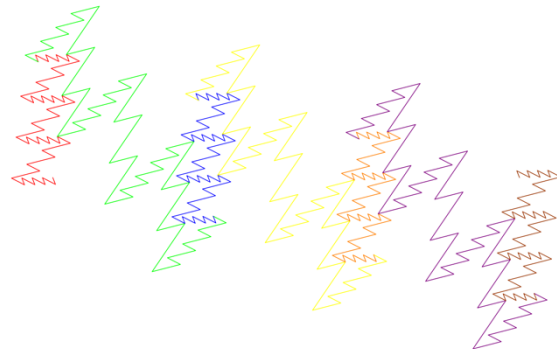
, $\left(\frac{21}{32}, \frac{1}{32}\sqrt{7}\right)$, $\left(\frac{33}{32}, -\frac{3}{32}\sqrt{7}\right)$

en (1, 0).

Stap 1 ziet er als hiernaast uit.



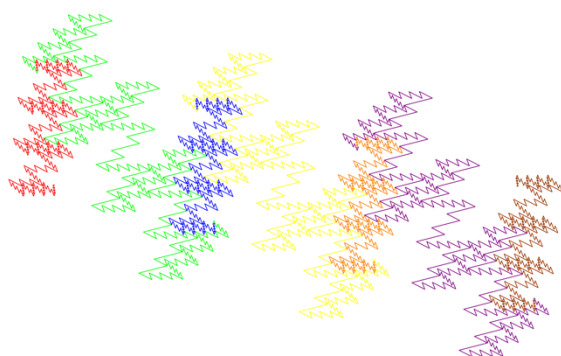
stap 2



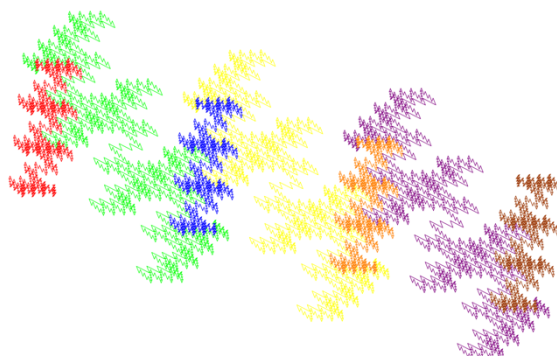
stap 3

Bij stap 3 zien we dat de fractal zichzelf raakt. In de ingesloten vorm bovenaan kun je met enige fantasie een berglandschap zien, met rechts drie bergtoppen en links een naaldboom. Dat is de reden dat ik deze fractal **Triplet Peaks** noem.

De dimensie van deze fractal is 2 en er zijn geen snijdende of overlappende lijnstukken. De fractal is dus vlakvullend.



stap 4



stap 5

Quads Peaks

We beginnen met negen lijnstukken. Vanwege symmetrie zit het middelste lijnstuk a in het midden vast aan het punt $(\frac{1}{2}, 0)$.

Om de dimensie 2 te laten zijn, geldt: $5a^2 + 4b^2 = 1$.

We kiezen weer voor de verhouding k tussen a en b :

$$a = kb.$$

Hiermee drukken we a en b uit in k :

$$5(kb)^2 + 4b^2 = 1 \rightarrow 5k^2b^2 + 4b^2 = 1 \rightarrow b^2(5k^2 + 4) = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{5k^2 + 4} \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{5k^2 + 4}}$$

$$a = kb = \frac{k}{\sqrt{5k^2 + 4}}$$

De cosinusregel in $\triangle OAB$ geeft:

$$(\frac{4}{5}b)^2 = (\frac{1}{5})^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot a \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{16}{25(5k^2 + 4)} = \frac{1}{25} + \frac{k^2}{5k^2 + 4} - \frac{2k}{5\sqrt{5k^2 + 4}} \cos \alpha$$

$$\frac{2k}{5\sqrt{5k^2 + 4}} \cos \alpha = \frac{1}{25} + \frac{k^2}{5k^2 + 4} - \frac{16}{25(5k^2 + 4)}$$

$$\cos \alpha = \left[\frac{5k^2 + 4}{25(5k^2 + 4)} + \frac{25k^2}{25(5k^2 + 4)} - \frac{16}{25(5k^2 + 4)} \right] \frac{5\sqrt{5k^2 + 4}}{2k}$$

$$= \frac{30k^2 - 12}{25(5k^2 + 4)} \cdot \frac{5\sqrt{5k^2 + 4}}{2k} = \frac{15k^2 - 6}{5k\sqrt{5k^2 + 4}}$$

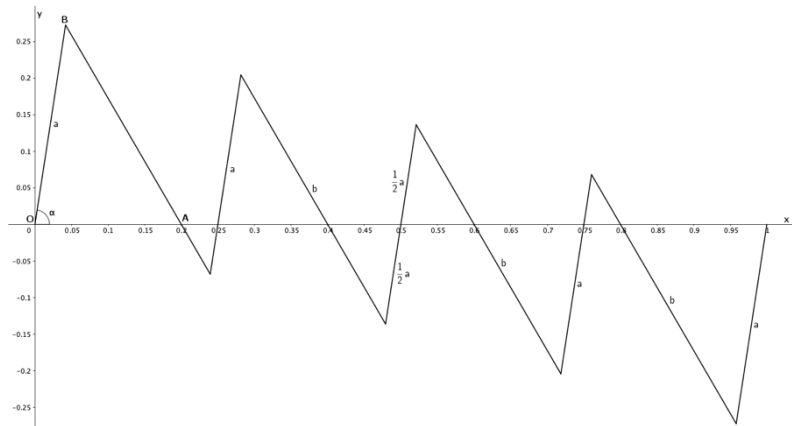
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{15k^2 - 6}{5k\sqrt{5k^2 + 4}} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(15k^2 - 6)^2}{25k^2(5k^2 + 4)}}$$

$$= \sqrt{\frac{125k^4 + 100k^2}{25k^2(5k^2 + 4)} - \frac{225k^4 - 180k^2 + 36}{25k^2(5k^2 + 4)}} = \frac{1}{5k} \sqrt{\frac{125k^4 + 100k^2 - 225k^4 + 180k^2 - 36}{5k^2 + 4}}$$

$$= \frac{\sqrt{-100k^4 + 280k^2 - 36}}{5k\sqrt{5k^2 + 4}}$$

$$x_B = a \cdot \cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{5k^2 + 4}} \cdot \frac{15k^2 - 6}{5k\sqrt{5k^2 + 4}} = \frac{15k^2 - 6}{5(5k^2 + 4)}$$

$$y_B = a \cdot \sin \alpha = \frac{k}{\sqrt{5k^2 + 4}} \cdot \frac{\sqrt{-100k^4 + 280k^2 - 36}}{5k\sqrt{5k^2 + 4}} = \frac{\sqrt{-100k^4 + 280k^2 - 36}}{5(5k^2 + 4)}$$



$$k = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

Voor $k = 1/\sqrt{5}$ krijgen we:

$$a = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4}} = \frac{1}{5}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$x_B = \frac{15\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 6}{5\left(5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\right)} = \frac{-3}{25} = -\frac{3}{25}$$

$$y_B = \frac{\sqrt{-100\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^4 + 280\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 36}}{5\left(5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\right)} = \frac{\sqrt{-4 + 56 - 36}}{25} = \frac{\sqrt{16}}{25} = \frac{4}{25}$$

De coördinaten van de hoekpunten zijn resp.: (0, 0),

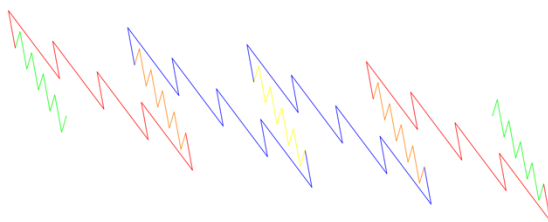
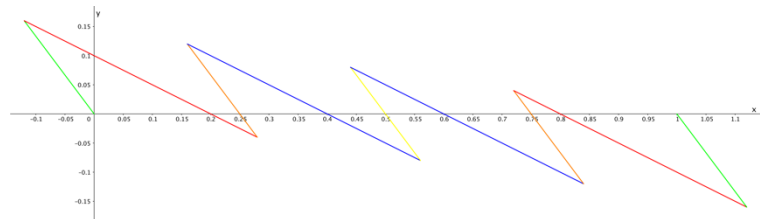
$$\left(-\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right), \left(\frac{7}{25}, -\frac{1}{25}\right),$$

$$\left(\frac{4}{25}, \frac{3}{25}\right), \left(\frac{14}{25}, -\frac{2}{25}\right),$$

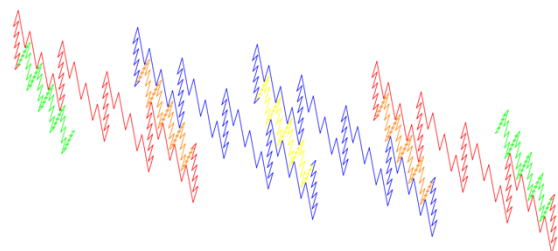
$$\left(\frac{11}{25}, \frac{2}{25}\right), \left(\frac{21}{25}, -\frac{3}{25}\right),$$

$$\left(\frac{18}{25}, \frac{1}{25}\right), \left(\frac{28}{25}, -\frac{4}{25}\right) \text{ en } (1, 0).$$

Stap 1 ziet er als hiernaast uit.



stap 2

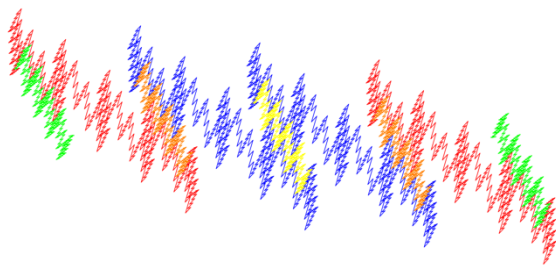


stap 3

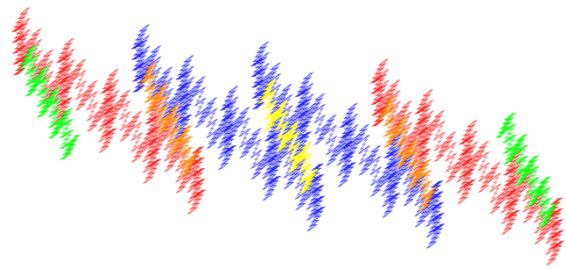
Bij stap 3 zien we dat de fractal zichzelf raakt. In de ingesloten vorm bovenaan kun je met enige fantasie een berglandschap zien, met rechts vier bergtoppen en links een naaldboom (helaas nauwelijks nog te zien...). Dat is de reden dat ik deze fractal

Quads Peaks noem.

De dimensie van deze fractal is 2 en er zijn geen snijdende of overlappende lijnstukken. De fractal is dus vlakvullend.



stap 4

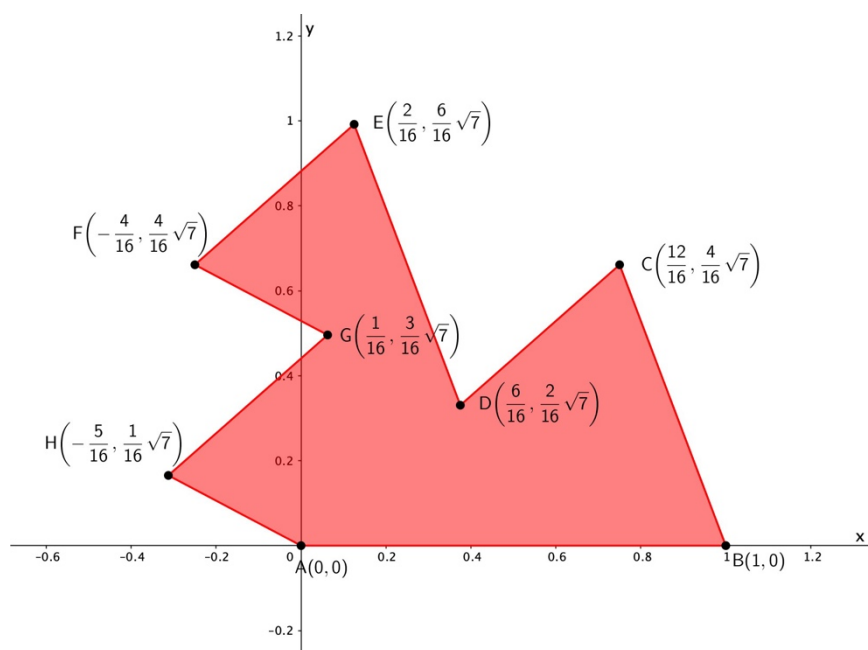


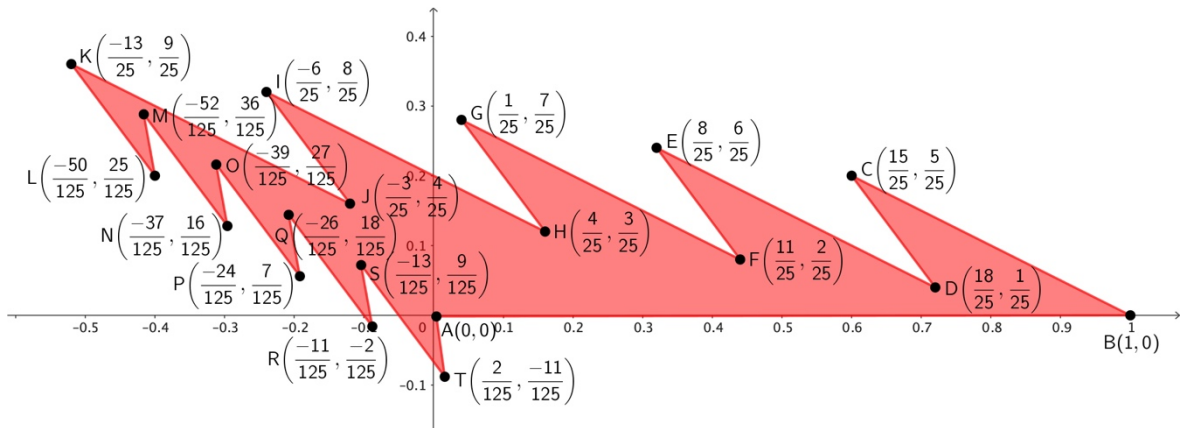
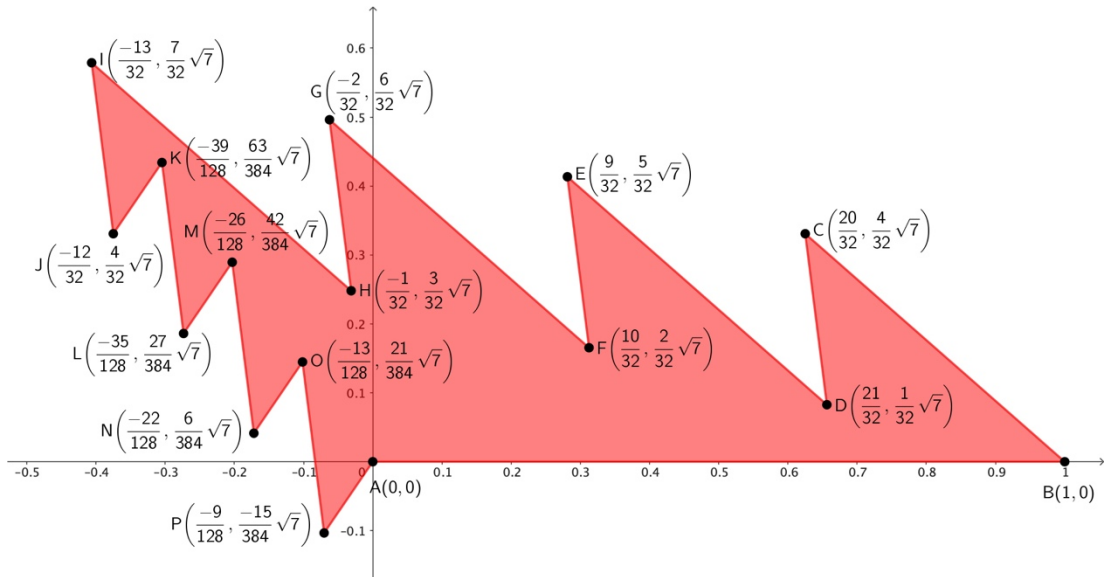
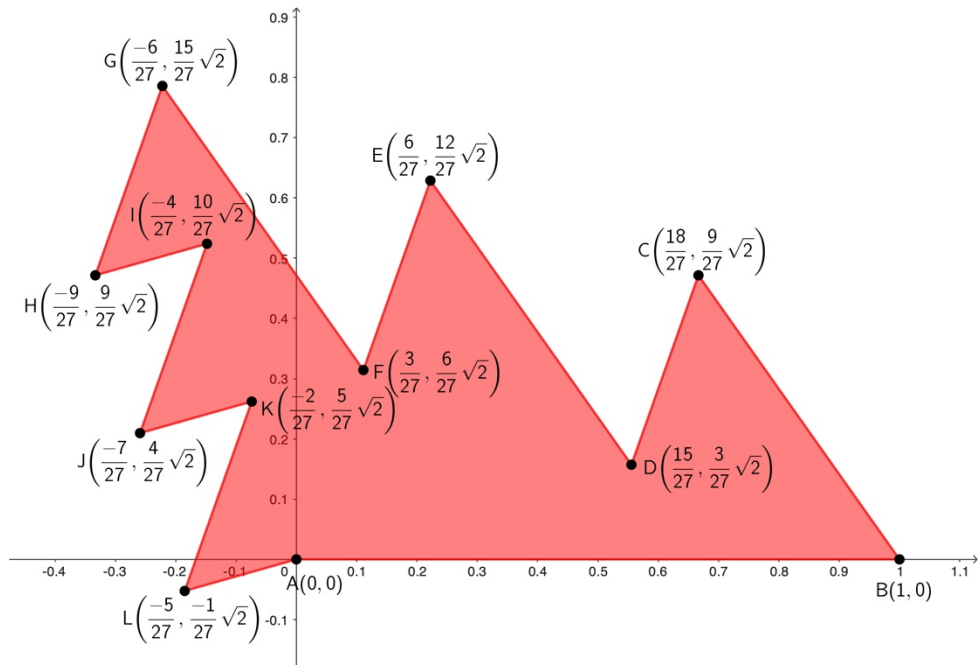
stap 5

Deze fractal wordt er niet fraaier op. Het is de laatste in deze reeks, want een vergelijkbare fractal met vijf bergtoppen is niet mogelijk.

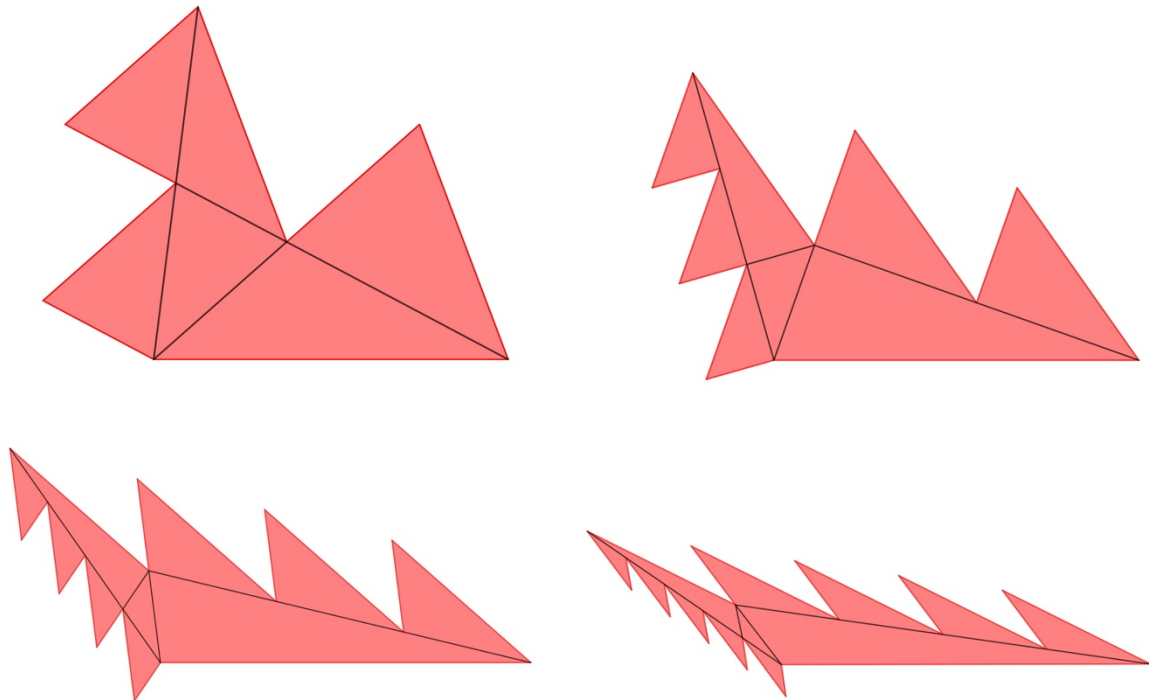
Peaks figuren

De ingesloten figuren van de Eend-kromme, Twin Peaks, Triplet Peaks en Quads Peaks zien er als volgt uit, met de coördinaten van de hoekpunten:

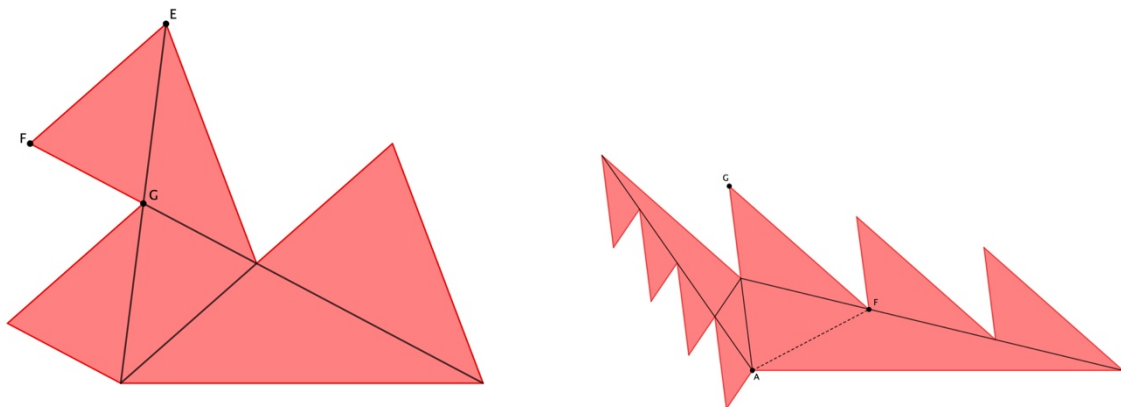




Deze figuren kunnen alle vier op vergelijkbare manier worden opgedeeld in driehoeken:

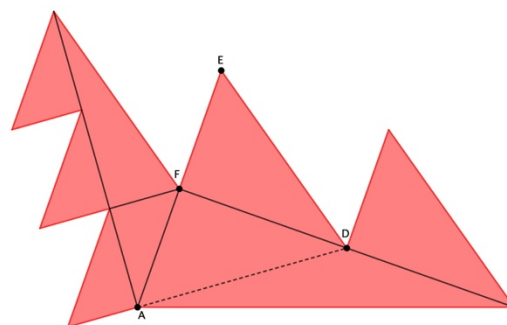


Nu vallen twee dingen op:



1. De driehoek FGE van de Eend-figuur en driehoek AFG van de Triplet Peaks zijn exact even groot en hebben dezelfde vorm. Het zijn gelijkbenige driehoeken met zijden met lengte $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}\sqrt{2}$. Bij de Eend-figuur zijn de hoeken aan de buitenkant gelijk aan de basishoek van deze gelijkbenige driehoek en bij de Triplet Peaks zijn de hoeken aan de buitenkant juist gelijk aan de tophoek.

2. Bij de Twin Peaks zijn AD en ED beide $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ lang. AF en FE zijn beide $\frac{1}{3}$ lang. Dat maakt dat $\angle AFD$ en $\angle EFD$ beide 90° zijn. FD is $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ lang. Deze figuur bestaat dus uit allemaal rechthoekige driehoeken, in de verhouding $1, \sqrt{2}$ en $\sqrt{3}$.

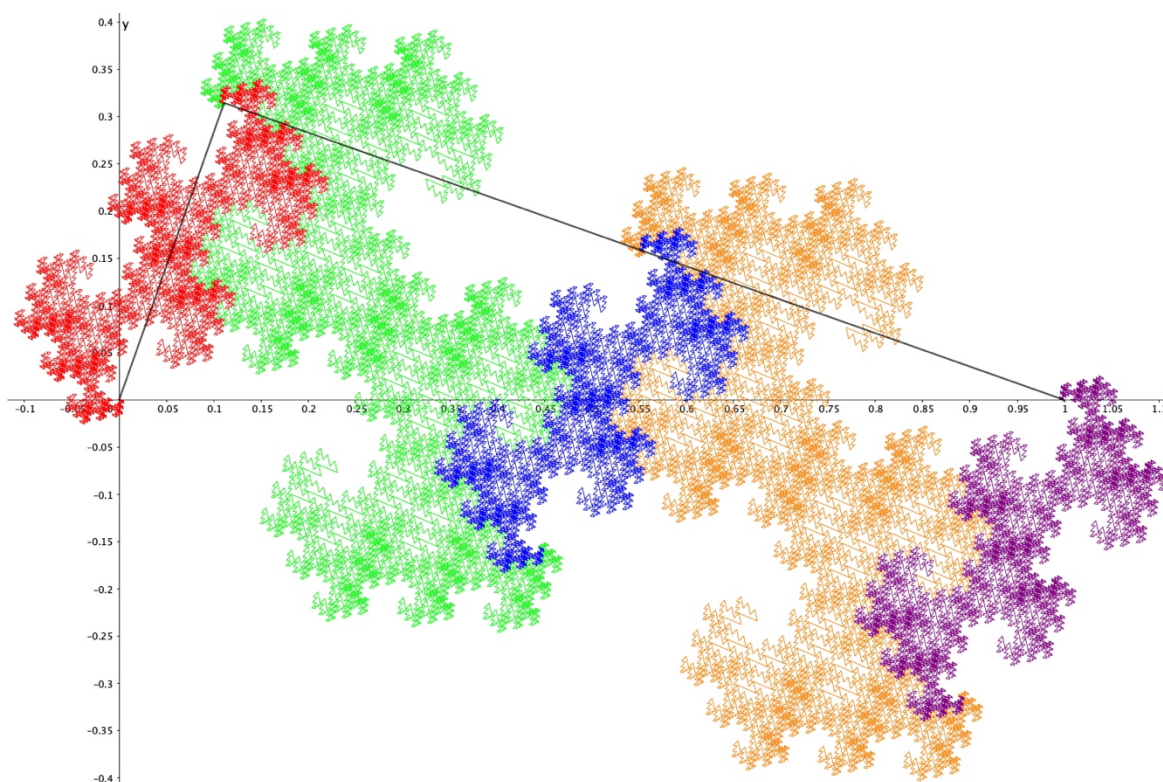


Ingesloten oppervlakte

Net als bij de Titanic fractals wil ik naar de ingesloten oppervlakte van de Peaks fractals kijken. Ik volg dezelfde methode.

Van de Twin Peaks nemen we stap 7 en trekken twee lijnen vanaf het hoogste punt van stap 1 naar $(0, 0)$ en naar $(1, 0)$. Samen met de x-as ontstaat zo een driehoek die grofweg overeenkomt met vorm van de fractal boven de x-as.

Aan de rechterzijde zien we twee stukjes van de fractal buiten de driehoek vallen, en ook twee witte stukjes binnen de driehoek. Wanneer we de stappen naar oneindig zouden laten gaan, worden de oppervlaktes van de gebiedjes binnen en buiten de driehoek precies even groot. Voor de oppervlakte bepaling kunnen we aan de rechterkant dus de rechte lijn van de driehoek gebruiken.



Aan de linkerkant zien we dat de helft van een verkleinde fractal buiten de driehoek blijft. Hier moeten we nog een correctie toepassen.

De hoogte van de driehoek is $\frac{2}{9}\sqrt{2}$. De oppervlakte van de driehoek is dus

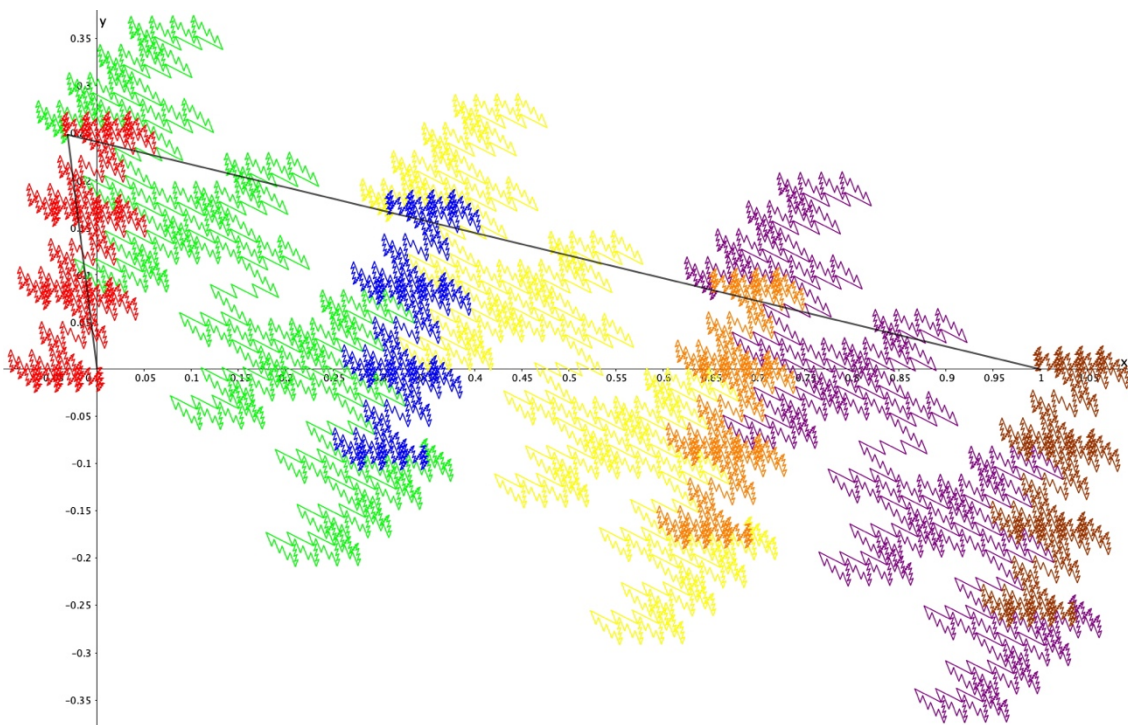
$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9}\sqrt{2} \cdot 1 = \frac{1}{9}\sqrt{2}$. De lengte van het linker lijnstuk van de driehoek is $\frac{1}{3}$, dus de

oppervlakte van de verkleinde fractal is een factor $\frac{1}{9}$ kleiner. De correctie is:

$\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{8}$. Na nog een vermenigvuldiging met 2 voor het gedeelte onder de x-

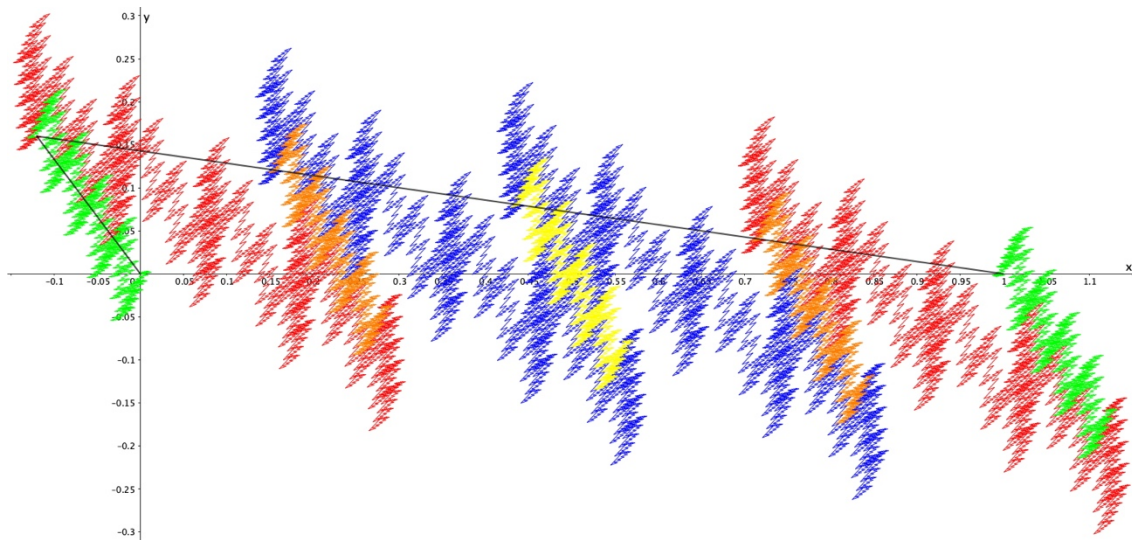
as wordt de oppervlakte van de Twin Peaks na oneindig veel stappen:

$$2 \cdot \frac{1}{9}\sqrt{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{2} \approx 0,35355 \cdot$$



Voor de Triplet Peaks wordt de berekening van de oppervlakte na oneindig veel

stappen: $2 \cdot \frac{3}{64}\sqrt{7} \cdot \frac{16}{15} = \frac{1}{10}\sqrt{7} \approx 0,26458 \cdot$



Voor de Quads Peaks wordt de berekening van de oppervlakte na oneindig veel stappen: $2 \cdot \frac{4}{50} \cdot \frac{25}{24} = \frac{1}{6} \approx 0,16667$.

Conclusie

Dit waren mijn onderzoeksvragen:

- Zijn er ook vlakvullende fractals te vinden, die niet aan een driehoekig of vierkant rooster gebonden zijn?
- Zo ja, wat zijn dan de eigenschappen van zulke fractals?

De eerste vraag kan ik ronduit met “ja” beantwoorden. Uitgaande van de suggestie van Mandelbrot over hoe de dimensie te berekenen van fractals die in stap 1 lijnstukken van ongelijke lengte hebben, heb ik deze methode omgedraaid en de dimensie vastgezet op 2. Dat is namelijk een van de voorwaarden voor een vlakvullende fractal: zijn dimensie is 2. De andere voorwaarde is symmetrie. Op deze manier heb ik de Eend-kromme gevonden en deze bleek ook nog oneindig veel varianten in zich te herbergen.

Daarnaast is op vergelijkbare manier nog twee reeksen andere fractals gevonden: de Titanic fractals en de Peaks fractals.

Eigenschappen van de Eend-kromme en zijn varianten zijn:

- De verhouding tussen de lengtes van de lijnstukken is $1:\sqrt{2}$.
- Over alle varianten en over alle stappen daarvan geldt dat lijnstukken met gelijke lengte ook evenwijdig aan elkaar zijn.
- Naast de Eend-figuur, de vogel en zijn nest (parallellogram) ontstaan steeds meer verschillende ingesloten vormen.
- De uiteindelijke contouren en ingesloten oppervlakte van alle varianten zijn gelijk aan die van de Eend-kromme.
- De lengtes van de lijnstukken in stap 1 verschillen een of meer factoren $\sqrt{2}$ van elkaar. De overeenkomstige gekleurde deeloppervlaktes in de uiteindelijke fractal verschillen hetzelfde aantal factoren 2 van elkaar.

De Titanic fractals vormen een reeks nieuwe fractals. In eerste instantie heb ik die Titanic2, Titanic3 en Titanic4 genoemd, waarbij het cijfer refereert aan het aantal “schoorstenen” op het zinkende schip. Naderhand heb ik dit cijfer gedefinieerd als het Titanic nummer t , waarmee een aantal eigenschappen voor alle Titanic fractals kunnen worden beschreven. Voor de Eend-kromme geldt dan $t = 1$.

Eigenschappen van de reeks Titanic fractals zijn:

- Het aantal lijnstukken in stap 1 van de fractal is $4t - 1$.
- De verhouding tussen de lengtes van de lijnstukken is $1:\sqrt{2t}$.
- Over alle stappen binnen een fractal zijn lijnstukken met gelijke lengte ook evenwijdig aan elkaar.
- Er ontstaan steeds meer verschillende ingesloten vormen.
- De ingesloten oppervlakte van de fractal als deze fractal tot in het oneindige zou worden doorgevoerd is $O_t = \frac{\sqrt{8t-1}}{2(2t+1)}$.

- De lengtes van de lijnstukken in stap 1 verschillen een factor $\sqrt{2t}$ van elkaar. De overeenkomstige gekleurde deeloppervlaktes in de uiteindelijke fractal verschillen een factor $2t$ van elkaar.

De Peaks fractals vormen nog een drietal nieuwe fractals. Ik heb ze Twin Peaks, Triplet Peaks en Quads Peaks genoemd. Je zou kunnen zeggen dat de Eend-kromme ook in deze serie past, met rechts een bergtop en links een naaldboom(pje). Eigenschappen van de Peaks fractals zijn:

- De ingesloten figuren zijn per fractal allemaal gelijkvormig.
- De verhouding tussen de lengtes van de lijnstukken is resp. $1:\sqrt{3}$, $1:\sqrt{4}$ en $1:\sqrt{5}$.
- Over alle stappen binnen een fractal zijn lijnstukken met gelijke lengte ook evenwijdig aan elkaar.

Reflectie

In deze studie is de vondst van de Eend-kromme en zijn varianten besproken. Van de Titanic2 fractal is slechts een variant beschreven; er zijn er waarschijnlijk veel meer. Ook van de Titanic3 en Titanic4 fractals zijn waarschijnlijk veel varianten te vinden.

Daarnaast zijn er Titanic fractals en hun varianten te vinden met een $t > 4$.

Van de drie Peaks fractals is alleen bij de Twin Peaks een variant beschreven.

Wellicht zijn er daar ook veel meer varianten te vinden.

Het is niet uit te sluiten dat er nog meer vlakvullende fractals te vinden zijn, die niet aan een driehoekig of vierkant rooster gebonden zijn. Het kan onderwerp van verder onderzoek zijn om deze te vinden. De methodes die in dit rapport beschreven zijn kunnen daarbij behulpzaam zijn.

Nawoord

Wat begon met een poging om fractals te genereren met het computerprogramma GeoGebra, is geculmineerd in een studie over fractals die ik niet in eerder onderzoek over dit onderwerp ben tegengekomen. Het heeft mij regelmatig een kick gegeven, over het werken met GeoGebra, over de wiskundige vondsten die ik deed en over de fraaie visualisaties die ik gemaakt heb.

Veel van die visualisaties staan in dit rapport; vele andere ook niet. Dat betreft visualisaties die geen betrekking hebben op het onderwerp van dit rapport, maar ook animaties die wel bij dit onderwerp aansluiten, maar waarvoor dit papier niet het goede medium is.

Plaatjes zeggen meer dan duizend woorden. En dat geldt nog meer voor bewegende plaatjes, ofwel animaties. Ik heb het afgelopen jaar deelgenomen aan een kunstroute in mijn woonwijk. Naast van wiskunde afgeleide kunstwerken –waarvan er een exemplaar is opgenomen in dit rapport– heb ik fractals op canvas laten zien en op een aantal computerschermen ook animaties met fractals. Vooral deze laatste stonden zeer in de belangstelling. Regelmaat en symmetrie spreken mensen aan, ook zonder besef van de wiskunde die erachter schuilgaat.

Ik ben aan dit project begonnen vanuit mijn nieuwsgierigheid naar of met GeoGebra plaatjes van fractals kunnen worden gemaakt. Ik had vanuit mijn werk als docent wiskunde al veel met GeoGebra gewerkt en ik vond het een prettig programma om mee te werken. Maar bij dit project liep ik tegen de grenzen van het programma aan. Allereerst was daar de beperkte lengte van de scripts die ingevoerd konden worden. Dat was lastig, maar het dwong mij ook om compactere scripts te schrijven. Erger was de beperkte lengte van lijsten van (hoek)punten: in zo'n lijst passen maximaal zo'n 8000 punten. Maak je de lijst langer, dan geeft GeoGebra geen foutmelding, maar het wordt opeens zeer traag... Dat vergt dan weer wat trucjes om daar omheen te werken.

Achteraf gezien had ik wellicht beter een programmeertaal kunnen gaan gebruiken om plaatjes van fractals mee te maken.

Literatuurlijst

Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1982.

Ventrella, Jeffrey J., *Brain-Filling Curves: A Fractal Bestiary*, LuLu.com, (2012). URL: <http://archive.org/download/BrainfillingCurves-AFractalBestiary/>.

Haverkort, Herman, Nico Bakker's duck plane-filling curve, (2022). URL: <http://herman.haverkort.net/media/research/eend.pdf>